1. Técnicas de integración

Proposición 1 (Integración por partes)**.** *Sean* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*, tales que* f' *y* g' *son continuas en* $[a,b]$*. Entonces,*

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

Demostración. Por las reglas elementales de derivación, sabemos que

$$(fg)' = gf' + fg'.$$

Recomodando los términos,

$$fg' = (fg)' - gf'.$$

Luego, por el TFC,

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g. \qquad \square$$

Proposición 2 (Integración por sustitución)**.** *Sean* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *tales que* f *y* g' *son continuas. Entonces,*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Demostración. Sea F una primitiva de f. Entonces,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por otro lado, para cada $t \in [a,b]$,

$$(F(g(t)))' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) = F(g(b)) - F(g(a)). \qquad \square$$

Proposición 3. *Sean* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*,* $a < b$ *y* $c < d$*. Hacemos* $D \coloneqq [a,b]\times[c,d]$*. Supongamos que* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *es continua. Entonces, para cada* $t \in [c,d]$*,* $f_t\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*,* $f_t(x) \coloneqq f(x,t)$ *es continua e integrable.*

Proposición 4. *Sea* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *continua y supongamos que* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f$ *es continua en* $[a,b]$*. Sea* $F\colon [c,d] \to \mathbb{R}$*,* $F(t) \coloneqq \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$*. Entonces,* F *es derivable y*

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Proposición 5 (Regla de Leibniz)**.** *Sea* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f$ *es continua. Sean* $\alpha, \beta\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ *derivables. Sea* $\varphi\colon [c,d] \to \mathbb{R}$*,*

$$\varphi(t) \coloneqq \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Entonces, φ *es derivable en* $[c,d]$ *y*

$$\varphi'(t) = f(\beta(t),t)\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicios

1. Hallar las integrales de las siguientes funciones:

   a)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

   b)
$$\int \mathrm{e}^x \sin(\mathrm{e}^x)$$

   c)
$$\int \mathrm{e}^{e^x}\,\mathrm{d}x$$

   d)
$$\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$$

   e)
$$\int \cos(\log(x))\,\mathrm{d}x$$

   f)
$$\int x^3\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$

   g)
$$\int \frac{x+4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

   h)
$$\int_0^1 x^{\frac{4}{3}} \log x\,\mathrm{d}x$$

i)

$$\int \frac{4}{(1-4x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

j)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(5+4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(2) = \frac{1}{2}$ y para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_1^x (f(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

Hallar $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Calcular

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\sqrt{2x}} (\sin(t^2)+\cos(2t^2))\mathrm{d}t.$$

4. Calcular

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\sqrt{1+x^2t^2}}{t}\mathrm{d}t.$$