1. Funciones trigonométricas

En $\mathbb{R}^2$, el círculo unitario es

$$S_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1 \ \}.$$

Por lo tanto, si $(x,y) \in S_1$, entonces

$$y = \sqrt{1-x^2}.$$

Note que $y \in [0,1]$.

Definición 1.

$$\pi := 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Sea $t \in [-1,1]$. Entonces, el área delimitada por la circunferencia unitaria, el eje x y el radio de ángulo θ_t que va del origen al punto $(t, \sqrt{1-t^2})$ es

$$\int_{t}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}.$$

Definición 2. *Sea* $A\colon [-1,1] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$A(t) := \int_{t}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}.$$

Proposición 3. *La función A tiene las siguientes propiedades:*

1. *Es continua en* $[-1,1]$.
2. *Es derivable en* $(-1,1)$ *y*
$$A'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}.$$
3. *Es decreciente.*
4. *Para cada* $t \in (-1,1)$,
$$A''(t) = -\frac{x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$
5. $A(-1) = \frac{\pi}{2}$, $A(0) = \frac{\pi}{4}$, $A(1) = 0$.

Demostración. 3. Se tiene notando que $A(t) < 0$ para cada $t \in (-1,1)$. $\square$

Con estas propiedades es posible realizar un esbozo de la gráfica de A: A'' es negativa en $(0,1)$, por lo que en este intervalo en cóncava; por otro lado A'' es positiva en $(-1,0)$, por lo que es convexa.

Definición 4. *Definimos* $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ *y* $\sin\colon [0,\pi] \to [0,1]$*, mediante*

$$\cos\theta := A^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\sin\theta := \sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

Proposición 5. $\cos$ *y* $\sin$ *tienen las siguientes propiedades:*

1. *Son funciones continuas.*
2. *Para* $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\theta \geq 0$ *y para* $\theta \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $\cos\theta \leq 0$.
3. *Para* $\theta \in [0,\pi]$, $\sin\theta \geq 0$.
4. *Ambas son diferenciables en* $(0,\pi)$*. Además* $\cos'\theta = -\sin\theta$ *y* $\sin'\theta = \cos\theta$.
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin(\pi) = 0$.
6. $\cos$ *es decreciente.*
7. $\sin$ *es creciente en* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *y decreciente en* $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.
8. $\cos$ *es cóncava en* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *y convexa en* $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.
9. $\sin$ *es cóncava en* $[0,\pi]$

Demostración.

1. Ambas funciones son continuas debido a su construcción.
2. Se sigue de la definición de cos.
3. Se sigue de la definición de sin.
4. Utilizando el teorema de la función inversa, obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}A^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{1}{2}2\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sin\theta.$$

   La derivada de $\sin\theta$ se obtiene directamente de la definición.

5. Los valores de sin y cos en estos puntos se sigue de sus definiciones.

6. Del inciso 3, se sigue $\cos' \theta = -\sin \theta \leq 0$.
7. Se sigue del inciso 2.
8. Calculando la segundas derivadas de cos y observando sus signos en los intervalos correspondientes, se tiene el resultado.
9. Calculando la segundas derivadas de sin y observando su signo, se tiene el resultado. $\square$

Podemos extender el dominio de cos a otros intervalos. Sea $\cos\colon [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mediante

$$\cos \theta = \cos(2\pi - \theta).$$

Proposición 6. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'' + f = 0$ y*

$$f(0) = a, \quad f'(0) = b.$$

Entonces, $f(x) = a \cos x + b \sin x$.

Demostración. Supongamos que $a = b = 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} (f'^2 + f^2)' &= 2(f''f' + f'f) \\ &= 2f'(f'' + f) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto existe $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)^2 + f(x)^2 = c$. En particular,

$$c = f'(0)^2 + f(0)^2 = b^2 + a^2 = 0.$$

Por lo tanto, $f'(x) = f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ahora, supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$ no son ambos cero. Para cada $x \in \mathbb{R}$, hacemos $g(x) := f(x) - a\cos x - b \sin x$. Entonces,

$$g''(x) + g(x) = 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0.$$

Por el análisis al inicio de la demostración, para todo $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$. $\square$

Proposición 7. *Para cada $x, y \in \mathbb{R}$,*

1. $\sin(x + y) = \sin y \cos x + \cos y \sin x$.
2. $\cos(x + y) = \cos y \cos x - \sin y \sin x$.

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R}$ fijo. Definimos $f_y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mediante

$$f_y(x) = \sin(x + y).$$

Entonces, $f_y''(x) = -f_y(x)$. Además $f_y(0) = \sin y$ y $f_y'(x) = \cos y$. Por la proposición 6,

$$\sin(x + y) = \sin y \cos x + \cos y \sin x.$$

La identidad para $\cos(x + y)$ se obtiene de manera similar. $\square$

Definición 8. *Sea* $Z_c := \left\{\frac{2n+1}{2}\pi \colon \ n \in \mathbb{Z}\right\}$. *Sea* $\tan \colon \mathbb{R} \backslash Z_c \to \mathbb{R}$ *como*

$$\tan\theta := \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

2. Ejercicios

1. Extender las definiciones de sin y cos a cualquier intervalo de la forma $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Hallar las gráficas de las siguientes funciones.

   a) $\sin(2x)$.
   b) $\tan\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   c) $\sin x - \sin 2x$.
   d) $x \sin x$.
   e) $\frac{\sin x}{x}$.

3. Demostrar que
$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

4. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Demostrar que
$$\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x).$$
$$\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x).$$