La integral y sus propiedades elementales

En lo siguiente consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada.

Definición 1. *Sean $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ y $P \subseteq [a,b]$. Diremos que P es una partición de $[a,b]$ si P es finito y $a, b \in P$.*

Enumeraremos los elementos de P de manera ascendente:

$$P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}, \qquad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b.$$

Denotaremos por $\mathcal{P}([a,b])$ al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

Definición 2. *Sean $P \in \mathcal{P}([a,b])$ y $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, hacemos*

$$\begin{aligned} m_j(f,P) &\coloneqq \operatorname{ínf}\{f(t)\colon\ t \in [t_j, t_{j-1}]\}; \\ M_j(f,P) &\coloneqq \sup\{f(t)\colon\ t \in [t_j, t_{j-1}]\}. \end{aligned}$$

Note que $m_j(f,P) \leq M_j(f,P)$.

Definición 3. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Definimos la suma inferior y la suma superior de Darboux, respectivamente, como*

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(f,P) &\coloneqq \sum_{j=1}^{m} m_j(f,P)(t_j - t_{j-1}); \\ \mathrm{U}(f,P) &\coloneqq \sum_{j=1}^{m} M_j(f,P)(t_j - t_{j-1}). \end{aligned}$$

Proposición 4. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $P \in \mathcal{P}([a,b])$. Entonces,*

$$\mathrm{L}(f,P) \leq \mathrm{U}(f,P).$$

Demostración. Se sigue directamente de las definiciones de sumas superiores e inferiores. $\square$

Lema 5. *Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, $P \in \mathcal{P}([a,b])$. Sea $k \in \{1, \ldots, m\}$ y $u \in [t_k, t_{k-1}]$. Entonces,*

$$\mathrm{L}(f,P) \leq \mathrm{L}(f,P \cup \{u\}) \leq \mathrm{U}(f,P \cup \{u\}) \leq \mathrm{U}(f,P).$$

Demostración. La desigualdad central se obtiene de la proposición 4. Veremos la desigualdad $\mathrm{L}(f,P) \leq \mathrm{L}(f, P \cup \{u\})$. La otra se obtiene de manera similar. Para esto, basta ver el $k-$ésimo sumando de la suma inferior.

Note que $[t_{k-1}, u], [u, t_k] \subseteq [t_{k-1}, t_k]$. Por lo tanto,

$$m_k(f, P \cup \{u\}) \geq m_k(f, P),$$
$$m_{k+1}(f, P \cup \{u\}) \geq m_k(f, P).$$

Así, el resultado se sigue obtiene de

$$m_k(f, P \cup \{u\})(u - t_{k-1}) + m_{k+1}(f, P \cup \{u\})(t_k - u) \geq m_k(f, P)(t_k - t_{k-1}). \qquad \square$$

Lema 6. *Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$ tales que $P \subseteq Q$. Entonces,*

$$L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,P).$$

Demostración. Este resultado se sigue de aplicar el lema 5 de manera iterada al conjunto $Q \backslash P$. $\square$

Corolario 7. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$. Entonces,*

$$L(f,P) \leq U(f,Q).$$

De este corolario se sigue que el conjunto de sumas superiores y el conjunto de sumas inferiores son acotados.

Definición 8. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Decimos que f es (Darboux) integrable en $[a,b]$, si*

$$\sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} L(f,P) = \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} U(f,P).$$

En ese caso, escribiremos

$$\int_a^b f := \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} L(f,P).$$

Ejemplo 9. *Sean $c \in \mathbb{R}$ y $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $t \in [a,b]$, $f(t) = c$. Veamos que f es integrable.*

Sea $P \in \mathcal{P}([a,b])$. Entonces,

$$L(f,P) = \sum_{j=1}^{m} m_j(f,P)(t_j - t_{j-1}) = c(b-a).$$

Note que también las sumas superiores tomarán el mismo valor. Como esta suma no depende de la partición, al tomar el supremo de las sumas inferiores (o el ínfimo de las sumas superiores),

$$\int_a^b f = c(b-a).$$

Lema 10. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces, f es integrable si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que*

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que f es integrable y sea $\varepsilon > 0$. Como f es integrable, existen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$ tales que

$$L(f, P_1) > \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2},$$
$$U(f, P_2) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Haciendo $P_\varepsilon \coloneqq P_1 \bigcup P_2$, por la proposición 5,

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

$\Longleftarrow$) Supongamos que f no es integrable. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$,

$$U(f, P) - L(f, P) \geq \delta.$$

Por lo tanto, se satisface la proposición. $\square$

Proposición 11. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Supongamos que existe $I \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}([a,b])$,*

$$L(f, P) \geq I - \varepsilon,$$
$$U(f, P) \leq I + \varepsilon.$$

Entonces, f es integrable y

$$\int_a^b f = I.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por el lema 10, existe $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es integrable.

Por otro lado, de $U(f,P) < I + \varepsilon$ se sigue que $U(f,P) \leq I$. De igual manera, $L(f,P) \geq I$. De aquí, $\int_a^b f \leq I$ y $\int_a^b f \geq I$. $\square$

Lema 12. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$ y $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces, f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Además,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $P \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que

$$L(f, P) - U(f, P) < \varepsilon. \tag{1}$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $c \in P$. Hacemos

$$\begin{aligned} P_1 &\coloneqq \{t \in P\colon\ t \le c\}, \\ P_2 &\coloneqq \{t \in P\colon\ t \ge c\}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$L(f, P) = L(f, P_1) + L(f, P_2), \quad U(f, P) = U(f, P_1) + U(f, P_2). \tag{2}$$

De (1) se sigue que

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \varepsilon.$$

De igual manera se tiene una desigualdad similar para P_2. Entonces, f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$.

De (2), tenemos

$$L(f, P) \le \int_a^c f + \int_c^b f \le U(f, P).$$

Pasando al supremo sobre las sumas inferiores y al ínfimo sobre las sumas superiores, obtenemos

$$\int_a^b f \le \int_a^c f + \int_c^b f, \qquad \int_a^b f \ge \int_a^c f + \int_c^b f.$$

□

Proposición 13. *Sean $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables. Entonces, $f + g$ es integrable y*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Demostración. Sea $P \in \mathcal{P}([a, b])$. Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, se satisface

$$\begin{aligned} m_j(f + g, P) &\ge m_j(f, P) + m_j(g, P), \\ M_j(f + g, P) &\le M_j(f, P) + M_j(g, P). \end{aligned}$$

Entonces,

$$L(f,P)+L(g,P)\le L(f+g,P)\le U(f+g,P)\le U(f,P)+U(g,P). \tag{3}$$

Por otro lado, sea $\varepsilon>0$. Como f y g son integrables, existen $P_1,P_2\in\mathcal{P}([a,b])$ tales que

$$\begin{aligned} U(f,P_1)-L(f,P_1)&<\frac{\varepsilon}{2}\\ U(g,P_2)-L(g,P_2)&<\frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Haciendo $P\coloneqq P_1\cup P_2$, de (3), tenemos

$$U(f+g,P)-L(f+g,P)\le U(f,P)-L(f,P)+U(g,P)-U(f,P)<\varepsilon.$$

Así, $f+g$ es integrable.

Por otro lado,

$$U(f+g,P)\le U(f,P)+U(g,P)<\int_a^b f+\int_a^b g+\varepsilon.$$

Por lo que

$$\int_a^b (f+g)\le\int_a^b f+\int_a^b g.$$

Procediendo de manera similar con las sumas inferiores, tenemos el resultado. □

Proposición 14. *Sean $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable y $\lambda\in\mathbb{R}$. Entonces, λf es integrable y*

$$\int_a^b(\lambda f)=\lambda\int_a^b f.$$

Demostración. Ejercicio. □

Lema 15. *Sea $c\in\mathbb{R}$. Hacemos $\mathbf{1}_c\colon[a,b]\to\mathbb{R}$,*

$$\mathbf{1}_c(t)\coloneqq\begin{cases}0, & t\ne c;\\ 1, & t=c.\end{cases}$$

Entonces, $\mathbf{1}_c$ es integrable y

$$\int_a^b\mathbf{1}_c=0.$$

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 16. *Sean $f, g\colon [a, b]\colon \mathbb{R}$ y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que*

$$f - g = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{c_j}.$$

Entonces, si f es integrable, g también lo es y

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Demostración. Ejercicio. □

Ejercicios

1. Sean $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables. Demostrar que fg también es integrable.

2. Calcular las integrales de las siguientes funciones en $[a, b]$:

   a) $f(x) \coloneqq x^2$.
   b) $f(x) \coloneqq x^3$.
   c) $f(x) \coloneqq x^2 - 1$.
   d) $f(x) \coloneqq x^3 - 2x$.

3. Calcular
   $$\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1 - x^2}.$$
   Sugerencia: Observar la simetría de la función respecto al eje x y utilizar particiones uniformes.

4. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Sean $c, d \in (a, b)$, $c < d$. Demuestre que f es integrable sobre $[c, d]$ y calcular la integral.

5. (Desigualdad de Cauchy–Schwarz) Sean $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables. Demuestre que
   $$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

6. Hallar las áreas de las regiones delimitadas por las funciones f y g.

   a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{2} + 2$.
   b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 2x + 4$.

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$ y las verticales que pasan por $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

7. a) Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $t \in [a,b]$, $f(t) =\geq 0$. Demuestre que

$$\int_a^b f \geq 0.$$

   b) Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables tales que para cada $t \in [a,b]$, $f(t) \geq g(t)$. Demuestre que

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

   c) Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y supongamos que $|f|$ también es integrable. Demostrar que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

8. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\int_a^b f = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) \mathrm{d}\, x.$$

9. Demostrar la proposición 14.

10. Demostrar el lema 15.

11. Demostrar la proposición 16.

12. Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas y sea $P \in \mathcal{P}([a,b])$. Argumente de manera detallada porqué

$$m_j(f+g, P) \geq m_j(f, P) + m_j(g, P), \quad \text{y} \quad M_j(f+P) \leq M_j(f, P) + M_j(g, P).$$

13. Sean $a, b > 1$. Demuestre que

$$\int_1^a \frac{1}{t} \mathrm{d}\, t + \int_1^b \frac{1}{t} \mathrm{d}\, t = \int_1^{ab} \frac{1}{t} \mathrm{d}\, t.$$

14. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e integrable. Demuestre que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$