Integrales impropias

La integración estudiada hasta el momento trata con funciones acotadas. Sin embargo, existen funciones que no son acotadas pero que su comportamiento permite el cálculo de el área bajo la curva. También existen muchos problemas de aplicación donde es necesario que las funciones sean integrables en intervalos no acotados. Los conceptos que estudiamos en esta sección permiten extender la integral a funciones con estas características.

Definición 1 (Integral impropia de una función no acotada)**.** *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $c \in (a,b)$, f es integrable en $[c,b]$. Suponemos que existe $I \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $c \in (a, a+\delta)$, entonces*

$$\left| \int_c^b f - I \right| < \varepsilon.$$

En este caso, decimos que I es la integral impropia de f en $[a,b]$.

Note que esta definición se puede reformular de la siguiente mantera: Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $c \in (a,b)$ f es integrable en $[c,b]$. Supongamos que existe el límite

$$\lim_{c \to a} \int_c^b f \coloneqq I.$$

En ese caso, decimos que I es la integral impropia de f en $[a,b]$.

Ejemplo 2. *Sea $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq \frac{1}{x}$. Veamos que no existe la integral impropia de f en $(0,1]$.*

Demostración. Sea $c > 0$. Entonces,

$$\int_c^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log(1) - \log(c) = -\log(c).$$

Pero $\lim_{c \to 0} \log(c) = +\infty$. Por lo tanto, no existe la integral impropia de f en $[0,1]$ $\square$

Ejemplo 3. *Sean $s < 0$, $s \neq -1$ y $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^s$. Veamos que la integral impropia de f existe.*

Demostración. Note que f es continua pero no es acotada. Sea $c > 0$. Entonces,

$$\int_c^1 x^s\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s+1}(1 - c^{s+1}).$$

Así si $s \in (-1, 0)$, la integral impropia de f en $[0,1]$ existe pues

$$\lim_{c \to 0} \frac{1}{s+1}(1 - c^{s+1}) = \frac{1}{s+1}.$$

Si $s < -1$, la integral impropia no existe. $\square$

Ejemplo 4. *Sea* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$*,* $f(x) \coloneqq \sin\left(\frac{1}{x}\right)$*. Determinaremos si* f *es integrable en* $[0,1]$*.*

Demostración. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notamos que g es continua y derivable. Además,

$$g'(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} + 2x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Así, $g'(x) = f(x) + h(x)$, donde

$$h(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $f = g' - h$. Como h es continua, por el TFC, existe $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $H' = h$. Entonces,

$$f(x) = g'(x) - H'(x) = (g - H)'(x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \cos \frac{1}{x} - \int_0^1 x \cos \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ &= \cos(1) - \int_0^1 x \cos \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Así, la integral impropia de f en $[0,1]$ existe. $\square$

En estos ejemplos, se trataron funciones que no estan definidas en el extremo izquierdo o que no son acotadas en este punto. El tratamiento en el extremo derecho se realiza exactamente igual.

Otro caso que también es de interés, sucede cuando la función no esta definida o no es acotada en el interior del intervalo.

Definición 5. *Sean* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *y* $p \in (a,b)$*. Supongamos que* f *no es acotada o que no esta definida en* p*, sin embargo existen*

$$\lim_{c \to p} \int_a^c f, \quad \lim_{c \to p} \int_c^b f.$$

Entonces la integral impropia de f *en* $[a,b]$ *es*

$$\lim_{c \to p} \int_a^c f + \lim_{c \to p} \int_c^b f.$$

Si estos límites existen, entonces el siguiente límite existe:

$$\lim_{c\to p}\left(\int_a^c f+\int_c^b f\right).$$

La existencia de este límite no implica la existencia de los límites de la definición anterior.

Ejemplo 6. *Sea $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)\coloneqq\frac{1}{x^3}$. Veamos que no existe la integral impropia de f en $[-1,1]$.*

Demostración. En este caso, f no esta definida en 0 y en el ejemplo 3 vimos que la integral impropia de f no existe en $[0,1]$. Por lo tanto no existe la integral impropia en $[-1,1]$. Por otro lado, sí se puede garantizar la existencia del límite

$$\lim_{c\to 0}\left(\int_{-1}^c x^{-3}\,\mathrm{d}x+\int_c^1 x^{-3}\,\mathrm{d}x\right)=\lim_{c\to 0}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}-1\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\right)=0.\qquad\square$$

Ejemplo 7. *Sea $f\colon[3,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)\coloneqq\frac{1}{(4-x)^{2/3}}$. Veamos que la integral impropia de f existe en $[3,5]$.*

Demostración. Observamos que f no esta definida en 4. Verificamos que existan las integrales en $[3,4)$ y en $(4,5]$.

Si $c<4$,

$$\int_3^c\frac{\mathrm{d}x}{(4-x)^{2/3}}=3(4-x)^{1/3}\Big|_3^c=3((4-c)^{1/3}-1).$$

Así,

$$\lim_{c\to 4}\int_3^c\frac{\mathrm{d}x}{(4-x)^{2/3}}=\lim_{c\to 4}3((4-c)^{1/3}-1)=-3$$

Por otro lado, si $c>4$,

$$\int_c^5\frac{\mathrm{d}x}{(4-x)^{2/3}}=3(4-x)^{1/3}\Big|_c^5=3(-1-(4-c)^{1/3}).$$

Así,

$$\lim_{c\to 4}\int_c^5\frac{\mathrm{d}x}{(4-x)^{2/3}}=\lim_{c\to 4}3(-1-(4-c)^{1/3})=-3.$$

Como ambos límites existen, tenemos

$$\begin{aligned}\int_3^5\frac{\mathrm{d}x}{(4-x)^{2/3}}&=\lim_{c\to 4}\int_3^c\frac{\mathrm{d}x}{(4-x)^{2/3}}+\lim_{c\to 4}\int_c^5\frac{\mathrm{d}x}{(4-x)^{2/3}}\\&=-3-3\\&=-6.\end{aligned}\qquad\square$$

Ejercicios

1. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $c \in (a,b)$, f es integrable en $[c,b]$. Demuestre que existe la integral impropia de f en $[a,b]$.

2. Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que para cada $c \in (a,b)$ f es integrable en $c,b]$ y la integral impropia de g existe en $[a,b]$. Demostrar que existe la integral impropia de f en $[a,b]$.

3. Determinar si las siguientes integrales existen.

   a)
   $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}.$$

   b)
   $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+x^2)^{1/2}}.$$

   c)
   $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-x^2)^{1/2}}.$$

   d)
   $$\int_0^1 x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x.$$

   e)
   $$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}.$$

   f)
   $$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$