Integrales impropias

Definición 1. *Sea* $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que para cada* $c < a$*, la integral de* f *en* $[a,c]$ *existe. Suponemos que existe* $I \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $M > 0$ *tal que si* $c > M$*, entonces*

$$\left| \int_a^c f - I \right| < \varepsilon.$$

En ese caso, decimos que I *es la integral impropia de* f *en* $[a,+\infty)$ *y la denotamos por*

$$\int_a^{+\infty} f.$$

Ejemplo 2. *Sean* $a > 0$ *y* $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$*,* $f(t) := \frac{1}{t}$*. Veamos que la integral impropia de* f *en* $(a,+\infty)$ *no existe.*

Demostración. Sea $c > a$. Entonces,

$$\int_a^c \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \log(c) - \log(a).$$

Cuando $c \to +\infty$, $\log(c)$ se hace no acotado, por lo que la integral no existe. □

Ejemplo 3. *Sean* $a > 0$*,* $p > 0$*,* $p \neq 1$ *y* $f\colon (a,+\infty) \to \mathbb{R}$*,* $f(t) := x^p$*. Veamos para qué valores de* p *existe la integral impropia de* f *en* $[a,+\infty)$*.*

Demostración. Supongamos que $p > 1$ y sea $c > a$. Entonces,

$$\int_a^c x^{-p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_a^c = \frac{1}{1-p}(c^{1-p} - a^{1-p}).$$

Así, cuando $c \to +\infty$, $c^{1-p} \to 0$. Luego,

$$\int_a^{+\infty} x^{-p}\,\mathrm{d}x = -\frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

Por otro lado, supongamos que $p < 1$. Entonces,

$$\int_a^c x^{-p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}(c^{1-p} - a^{1-p}).$$

En este caso, $1 - p > 0$. Entonces, cuando c^{1-p} no es acotado cuando $c \to +\infty$. Por lo tanto, la integral indefinida en $[a,+\infty)$ no existe. □

Ejemplo 4. *Sea* $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$*,* $f(t) := \mathrm{e}^{-t}$*. Veamos que existe la integral indefinida de* f *en* $[0,+\infty)$*.*

Demostración. Sea $c > 0$. Entonces,

$$\int_0^c \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = -(\mathrm{e}^{-c} - 1) -$$

Luego, cuando $c \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-c} \to 0$. Por lo tanto,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = 1. \qquad \square$$

Proposición 5. *Sea $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que para cada $c > a$, f es integrable en $[a, c]$. Entonces, la integral indefinida*

$$\int_a^{+\infty} f$$

existe, si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que si $b > c > M$, entonces

$$\left| \int_c^b f \right| < \varepsilon.$$

Demostración. $\Longrightarrow$ Ejercicio.

$\Longleftarrow$ Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $a_n \coloneqq \int_a^{a+n} f$. Por hipótesis, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy por lo que es convergente. $\square$

Proposición 6. *Sea $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que para cada $t \in [a, +\infty)$, $f(t) \geq 0$. Entonces, la integral indefinida*

$$\int_a^{+\infty} f$$

existe si y solo si el conjunto

$$\left\{ \int_a^c f\colon \quad c \in (a, +\infty) \right\}$$

es acotado.

Demostración. Ejercicio. $\square$

Proposición 7. *Sean $f, g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tales que para cada $c > a$, f y g son integrables en $[a, c]$. Supongamos que para cada $t \in [a, +\infty)$, $f(t) \leq g(t)$ y que existe*

$$\int_a^{+\infty} g.$$

Entonces, existe la integral indefinida de f en $[a, +\infty)$ y

$$\int_a^{+\infty} f \leq \int_a^{+\infty} g.$$

Demostración. Para cada $c > a$,

$$\int_a^c f \leq \int_a^c g \leq \int_a^{+\infty} g.$$

Luego, por la proposición 6 existe

$$\int_a^{+\infty} f.$$

Por otro lado, como una cota superior del conjunto de integrales finitas de f es

$$\int_a^{+\infty} g,$$

se tiene el resultado. $\square$

Ejercicios

1. Demostrar la proposición 5 y dar lops detalles de la demostración de la suficiencia.

2. Demostrar la proposición 6.

3. Utilizando las proposiciones de esta sección, determinar si las siguientes integrales existen:

   a)
   $$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

   b)
   $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

   c)
   $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^p}\,\mathrm{d}x, \qquad p > 0.$$

   d)
   $$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

   e)
   $$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$