1. Función logaritmo

Definición 1. *Definimos* $\log\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *mediante la regla*

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t.$$

Proposición 2. *La función* log *satisface las siguientes propiedades:*

1. *Para todo* $t \geq 1$, $\log(t) \geq 0$. *Para* $t < 1$, $\log(t) < 0$.
2. *Para todos* $a, b \in (0,+\infty)$, $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.
3. *Es continua en* $(0,+\infty)$.
4. *Es derivable en* $(0,+\infty)$.
5. $\log(1) = 0$.
6. *Es creciente.*
7. *Es cóncava.*
8. *Es biyectiva.*

Demostración.

1. Note que para todo $t \in (0,+\infty)$, $\frac{1}{t} > 0$. Entonces, para $t \geq 1$,

$$\log(t) = \int_1^t \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \geq 0.$$

   En cambio, para $t < 1$,

$$\log(t) = \int_1^t \frac{1}{t} = -\int_t^1 \frac{1}{t} \mathrm{d}t < 0.$$

2. Se tiene por la siguiente propiedad de la integral de la función $1/t$:

$$\int_1^{ab} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \int_1^a \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t + \int_1^b \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t.$$

3. Esta propiedad se tiene por la continuidad de la integral.
4. Esta propiedad se tiene por el teorema fundamental del cálculo. En este caso, para cada $x \in (0,+\infty)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log(x) = \frac{1}{x}$$

5. Esta propiedad también se tiene por la continuidad de la integral:

$$\log(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = 0.$$

6. De la propiedad 4, se sigue que para todo $x \in (0, +\infty)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

   Por lo tanto, log es creciente en $(0, +\infty)$.

7. Note que log es dos veces derivable. Entonces, para cada $x \in (0, +\infty)$,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\log(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

   Por lo tanto, log es cóncava.

8. Como log es creciente, en particular es inyectiva. Como el rango de la función es todo $\mathbb{R}$, la función es suprayectiva.

$\square$

Proposición 3. *Sean $a, b > 0$. Entonces,*

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b).$$

Demostración. Por la propiedad 2 de la proposición anterior,

$$\log(a) = \log\left(a\frac{b}{b}\right) = \log\left(\frac{a}{b}\right) + \log(b).$$

Por lo tanto, se tiene el resultado. $\square$

Definición 4. *Hacemos* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *mediante*

$$\exp(t) = \log^{-1}(t).$$

Proposición 5. *Para cada $t \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(t) = \exp(t).$$

Demostración. El resultado se sigue inmediatamente del teorema de la función inversa.

$\square$

Proposición 6. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces,*

1. $$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

2. *Si $b \neq 0$,*
$$\exp\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}.$$

Demostración. Sean $x \coloneqq \exp(a)$, $y \coloneqq \exp(b)$. Entonces,

$$\exp(a+b) = \exp(\log(x)+\log(y)) = \exp(\log(xy)) = xy = \exp(a)\exp(b). \qquad \square$$

La otra igualdad se obtiene de manera similar.

Proposición 7. *Sea $a > 0$. Entonces,*

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\log(a^n) = n\log(a)$.*
2. *Para cada $p \in \mathbb{Z}$, $\log(a^p) = p\log(a)$.*
3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\log\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\log(a)$.*
4. *Para cada $p \in \mathbb{Q}$, $\log\left(a^p\right) = p\log(a)$.*
5. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\log\left(a^t\right) = t\log(a)$.*

Demostración.

1. Se tiene por inducción.

2. Supongamos que $p > 0$. Entonces, buscamos el valor de $\log(a^{-p})$:
$$\begin{aligned} 0 = \log(1) = \log(a^0) &= \log(a^{p-p}) \\ &= \log(a^p) + \log(a^{-p}) \\ &= p\log(a) + \log(a^{-p}). \end{aligned}$$
Por lo tanto,
$$\log(a^{-p}) = -p\log(a).$$

3. Sea $n \in \mathbb{N}$. El resultado se obtiene de la siguiente cadena de igualdades:
$$\log(a) = \log(a^{\frac{n}{n}}) = n\log(a^{\frac{1}{n}}).$$

4. Se tiene de las propiedades 3 y 4.

5. Se tiene por la continuidad de log.

$\square$

Teorema 8. *Sea $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciable tal que para cada $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=f(x)$. Entonces, existe $c\in\mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{x}\,.$$

Demostración. Sea $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que para cada $x\in\mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{x}}.$$

Entonces, $g'(x)=0$. Por lo tanto, existe $c\in\mathbb{R}$ tal que para cada $x\in\mathbb{R}$, $c=g(x)$. $\square$

Definición 9. *Sea $a>0$. Para cada $x\in\mathbb{R}$, hacemos $a^{x}\coloneqq \mathrm{e}^{a\log(a)}$.*

2. Ejercicios

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones.

   a) $f(x)=\log(1+\log(1+\log(1+\mathrm{e}^{1+x^2})))$.

   b) $f(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}$.

   c) $f(x)=\log(3+\mathrm{e}^{4x})\,\mathrm{e}^{4x}$

2. Sea $f\colon \mathbb{R}\to(0,+\infty)$ diferenciable. Demuestre que

$$f'(x)=f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(f(x)).$$

   Utilizando este resultado, calcular la derivada de las siguientes funciones

   a) $f(x)=(1+x)(1+\mathrm{e}^{x^2})$.

   b) $\frac{x^2(3+x)^{\frac{1}{4}}}{(1-x)(3+x^2)^{\frac{2}{3}}}$.

   c) $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}(1+x^3)}$.

3. Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ diferenciable tal que para cada $t\in[a,b]$, $f(t)>0$. Calcular

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$