1. Conjuntos acotados

En este curso trabajaremos con el eje real extendido. Esto es,

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ se llaman "más infinito" y "menos infinito", respectivamente. Extendemos el orden usual de $\mathbb{R}$ ($<$) a $\overline{\mathbb{R}}$ mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, &\quad x < +\infty; \\ \forall x \in \mathbb{R}, &\quad x > -\infty. \end{aligned}$$

Definición 1. *Sea $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.*

1. *Decimos que X es un conjunto acotado por arriba si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in X$,*
$$x \leq M.$$
En este caso, decimos que M es cota superior de X.

2. *Decimos que X es un conjunto acotado por abajo si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in X$,*
$$m \leq x.$$
En este caso, decimos que m es cota inferior de X.

Si X es acotado por arriba y por abajo, solo decimos que X es acotado.

Definición 2 (Conjuntos de cotas superiores e inferiores)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado. Definimos el conjunto de cotas superiores de A como*

$$\mathrm{CS}(A) := \{M \in \overline{\mathbb{R}} \colon\ \forall x \in A,\ x \leq M\}.$$

Definimos el conjunto de cotas inferiores de A como

$$\mathrm{CI}(A) := \{m \in \overline{\mathbb{R}} \colon\ \forall x \in A,\ m \leq x\}.$$

Un modo equivalente de entender la definición 1 en términos de CS y CI es:

Definición 3. *Sea $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Decimos que X es un conjunto acotado por arriba si se satisface $\mathrm{CS}(X) \bigcap \mathbb{R} \neq \varnothing$.*

Ejemplo 4. *Sea $A = [4, 9)$. Entonces, $0, -1, \pi \in \mathrm{LB}(A)$ y $9, 3\pi, 10 \in \mathrm{CS}(A)$.*

Ejemplo 5. *$\mathbb{N}$ no tiene cotas superiores, pues para cada $M > 0$ podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$.*

Lema 6 (Monotonía de las cotas superiores)**.** *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces,* $\mathrm{UB}(B) \subseteq \mathrm{CS}(A)$.

Demostración. Sea $b \in \mathrm{UB}(B)$ y $x \in A$. Como $A \subseteq B$, $x \in B$ y $x \leq b$. Debido a que x fue arbitrario, se satisface que para cada $x \in A$, $x \leq b$. Por lo tanto, $b \in \mathrm{CS}(A)$. Como b fue elegido de manera arbitraria en $\mathrm{CS}(B)$, concluimos que $\mathrm{CS}(B) \subseteq \mathrm{CS}(A)$. □

Definición 7 (Máximo de un conjunto)**.** *Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \mathbb{R}$. Decimos que b es máximo de A si $b \in A$ y $b \in \mathrm{CS}(A)$. En este caso escribiremos*

$$b = \max A \quad \text{ó} \quad b = \max_{x \in A} x.$$

Proposición 8. *Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Si A tiene máximo, es único.*

Demostración. Ejercicio. □

2. Supremo e ínfimo de un conjunto

Definición 9. *Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $A \neq \varnothing$ y acotado. Definimos el supremo de A como la mínima cota superior de A. Es decir,*

$$\sup(A) \coloneqq \min_{M \in \mathrm{CS}(A)} M.$$

Definimos el ínfimo de A como la máxima cota inferior de A. Es decir,

$$\inf(A) \coloneqq \max_{m \in \mathrm{LB}(A)} m.$$

Proposición 10. *Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $A \neq \varnothing$ y acotado. Entonces,* $\sup(A)$ *es úninco.*

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 11. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que A es acotado y $A \neq \varnothing$. Entonces,*

$$\sup(A) \leq b \iff b \in \mathrm{CS}(A).$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $\sup(A) \leq b$. Sea $a \in A$. Como $\sup(A)$ es una cota superior de A, se satisface $a \leq \sup(A) \leq b$. Como a fue arbitrario, se satisface

$$\forall x \in A,\ x \leq b.$$

Por lo tanto, $b \in \mathrm{CS}(A)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $b \in \mathrm{UB}(A)$. Utilizando la definición 9, tenemos

$$\sup(A) = \min_{M \in \mathrm{CS}(A)} M \leq b. \qquad \square$$

Proposición 12. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, tales que $A \neq \varnothing$ y acotado y $b \in \mathrm{UB}(A)$. Entonces, $b = \sup(A)$ si y solo si, para cada $c < b$ existe $a \in A$ tal que $c < a$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $b = \sup(A)$. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < b$. Supongamos que $c \in \mathrm{UB}(A)$. Entonces, para cada $x \in A$, $x \leq c$. Como b es la mínima cota superior, $b \leq c$; lo cual no es posible. Por lo tanto, $c \notin \mathrm{UB}(A)$. Es decir, existe $a \in A$ tal que $c < a$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que para cada $c < b$ existe $a \in A$ tal que $c < a$. Como $b \in \mathrm{UB}(A)$, por la definición 9 se tiene la desigualdad $\sup(A) \leq b$. Supongamos que $\sup(A) < b$. Por hipótesis, existe $a \in A$ tal que $\sup(A) < a$. Esto no es posible, pues $\sup(A) \in \mathrm{UB}(A)$. Por lo tanto, $\sup(A) = b$. $\square$

Proposición 13. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tales que $A, B \neq \varnothing$, A es acotado y $B \subseteq A$. Entonces, $\sup(B) \leq \sup(A)$.*

Demostración. Por el lema 6, $\mathrm{UB}(A) \subseteq \mathrm{UB}(B)$. En particular, $\sup(A) \in \mathrm{UB}(A)$, por lo que $\sup(A) \in \mathrm{UB}(B)$. Es decir, para cada $x \in B$, $x \leq \sup(A)$. Por la proposición 11, concluimos que $\sup(B) \leq \sup(A)$. $\square$

Corolario 14. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, tales que $A \neq \varnothing$ y acotado y $b \in \mathrm{UB}(A)$. Entonces, $b = \sup(A)$ si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $b - \varepsilon < a$.*

2.1. Ejercicios

1. En cada uno de los siguientes incisos, describir $\mathrm{CS}(A)$ y $\mathrm{CI}(A)$:
   a) $A = [0, 1]$.
   b) $A = \left\{ \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$.
   c) $[-3, 0] \bigcup (1, 5]$.
2. Demostrar la proposición 8.
3. Demostrar la proposición 10.
4. Escribir con cuantificadores lógicos la afirmación "b no es cota superior de A".
5. ¿Cuál es el supremo del conjunto vacío?

6. Enunciar y demostrar proposiciones de esta sección análogas para el ínfimo de un conjunto.

7. Demostrar que el supremo del conjunto $[0, 1]$ es 1 de dos formas distintas: utilizando $\mathrm{CS}([0, 1])$ y utilizando el corolario 14.

8. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ acotados. Demostrar que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

9. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ acotados. ¿Qué se puede afirmar sobre $\sup(A \bigcap B)$?

10. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que para cada $a \in A$, $a < b$. ¿Qué relación se puede establecer entre b y $\sup(A)$? ¿Porqué?

11. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que para cada $a \in A$, $a > b$. ¿Qué relación se puede establecer entre b y $\sup(A)$? ¿Porqué?

12. Enunciar y demostrar proposiciones análogas a las de esta sección para el ínfimo de un conjunto.