Series

Definición 1. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Definimos la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manera recursiva:*

$$s_1 \coloneqq \sum_{k=1}^{1} x_k = x_1$$
$$s_{n+1} \coloneqq \sum_{k=1}^{n+1} x_k = x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Si la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, nos referimos a su límite como la suma de la serie *y decimos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable. La serie será denotada de la siguiente manera:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \coloneqq \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Como nos interesa la convergencia de la sucesión de sumas parciales, reformulamos el criterio de convergencia sucesiones de Cauchy para sumas.

Proposición 2. *Sea $(x_k)k \in \mathbb{N}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es sumable si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m > N$, $n > m$,*

$$|x_{m+1} + \cdots + x_n| < \varepsilon.$$

Proposición 3. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = a, \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k = b.$$

Entonces,

a)
$$\sum_{k=1}^{\infty} (x+y)_k = a + b.$$

b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,
$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha x)_k = \alpha c.$$

Demostración. Ejercicio. □

Lema 4. *Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión sumable. Entonces,*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0.$$

Demostración. Denotamos por $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de sumas parciales. Notamos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = s_{n+1} - s_n.$$

Pasando al límite de ambos lados de la igualdad, tenemos

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = 0.$$ □

El lema anterior no da una condición suficiente para la convergencia de series. Es decir, existen sucesiónes que convergen a 0 pero no son sumables.

Ejemplo 5. *Consideramos la sucesión $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Como la sucesión de sumas parciales es creciente, basta analizar una subsucesión. Sea $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\alpha(k) \coloneqq 2^k$. Se puede verificar por inducción que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$s_{\alpha(k)} \geq 1 + \frac{k}{2}.$$

Por lo tanto, la sucesión de sumas parciales no es acotada.

Ejemplo 6. *Sea $a \in (-1, 1)$. Consideramos la sucesión $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Veamos que esta sucesión es sumable.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por S_n a la n-ésima suma parcial. Entonces, para cada $n, m \in \mathbb{N}$, si $n > m$,

$$\begin{aligned} |S_n - S_m| &= |a^{m+1} + \cdots + a^n| \\ &= \left| \frac{a^{n+1} - a^{n+1}}{1 - a} \right|. \end{aligned}$$

Como $|a| < 1$, se tiene que $|a|^{n+1}, |a|^{m+1} < 1$. Luego,

$$|S_n - S_m| \leq \frac{|a|^{n+1} + |a|^{m+1}}{1 - a} \leq 2\frac{|a|^{m+1}}{1 - a}.$$

Recordemos que $\lim_{k\to\infty} a^k = 0$. Por lo tanto, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Es decir, la sucesión $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es sumable. Notamos que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= a + a^2 + \cdots a^n + a^{n+1} \\ &= a + a(a + \cdots + a^n) \\ &= a + aS_n. \end{aligned}$$

Luego, tenemos la identidad

$$S_{n+1} - aS_n = a. \tag{1}$$

Denotamos por S a la suma de la suceción. Entonces, al tomar el límite en (1), tenemos

$$\begin{aligned} S - aS &= a \\ S(1-a) &= a \\ S &= \frac{a}{1-a}. \end{aligned}$$

Así, para cada $a \in (-1, 1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{a}{1-a}.$$

La siguiente proposición se sigue inmediatamente de la teoría de sucesiones.

Proposición 7. *Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos. Supongamos que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Entonces, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es sumable.*

Definición 8. *Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Decimos que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es absolutamente sumable si $(|x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ es sumable.*

Proposición 9. *Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión absolutamente sumable. Entonces, $(x_k)_k$ es sumable.*

Proposición 10. *Sean $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales no negativos tales que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \leq y_k$. Supongamos que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es sumable. Entonces, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es sumable.*

Proposición 11. *Sean $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} \neq 0.$$

Entonces, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es sumamble, si y solo si $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es sumable.

Demostración. Sea $c := \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k}$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $k > N$,

$$\frac{1}{c} x_k \leq y_k \leq c x_k.$$

Así, el resultado se sigue de la proposición 10. □

Los siguientes resultados se siguen de la convergencia de la serie geometrica (Ejemplo 6).

Proposición 12. *Sean $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $r \in (0,1)$ tal que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$,*

$$|x_n|^{\frac{1}{n}} < r.$$

Entonces, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es absolutamente sumable.

Si $r > 1$, la serie diverge.

Corolario 13 (Criterio de la raíz enésima)**.** *Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y sea $r \coloneqq \lim_{k\to\infty} |x_k|^{\frac{1}{k}}$.*

1. *Si $r < 1$, la sucesión es absolutamente sumable.*

2. *Si $r > 1$, la serie diverge.*

Proposición 14. *Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq 0$. Supongamos que existe $r \in (0,1)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq r.$$

Entonces, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es absolutamente sumable.

Si $r > 1$ y $\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} > r$, la serie diverge.

Corolario 15 (Criterio del cociente)**.** *Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq 0$. Sea $r \coloneqq \lim_{k\to\mathbb{N}} \frac{x_{k+1}}{x_k}$.*

1. *Si $r < 1$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es absolutamnte sumable.*

2. *Si $r > 1$, la serie diverge.*

Ejercicios

1. Determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series. De ser posible, encontrar su suma:

   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}$.
   b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{2^k}$
   c) $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(2^{\frac{1}{k}}\right)$.
   d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$.
   e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$.

f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$.

2. Considere la serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k.$$
¿Para qué valores de x se garantiza su convergencia?