Sucesiones de funciones

Definición 1. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, está dada una función $f_n \colon A \to \mathbb{R}$. Entonces, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones en A.*

Definición 2. *Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en A y $f \colon A \to \mathbb{R}$. Decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f si para cada $x \in A$,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

En este caso escribimos $f_n \longrightarrow f$.

Vale la pena resaltar, que por unicidad del límite de una sucesión de números reales, el límite de puntual de una sucesión de funciones es único.

Ejemplo 3. *Sean $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ y $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Entonces, $f_n \longrightarrow f$.

En este ejemplo, cada f_n es continua, sin embargo su límite puntual no lo es. De igual modo, cada f_n es diferenciable en todo su dominio, pero f no es diferenciable en 1. Ahora, si consideramos la sucesión de integrales,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ejemplo 4. *Sean $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = 2nt\,\mathrm{e}^{-nt^2}$ y $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$. Entonces, $f_n \longrightarrow f$.*

En este caso, cada f_n es continua y diferenciable en $[0,1]$ y el límite también lo es. Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 2nx\,\mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} (1 - \mathrm{e}^{-n}) = 1.$$

Y

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Para garantizar que las propiedades de las funciones se conservan en el límite, es necesario considerar otro tipo de convergencia.

Definición 5. *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones en* A *y* $f\colon A \to \mathbb{R}$. *Decimos que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a* f *en* A *si para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para cada* $n > N$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall\, x \in A.$$

Proposición 6. *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones en* A *y* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *tales que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a* f. *Entonces,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge puntualmente a* f.

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 7. *Sean* $A \coloneqq [-5,5]$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n(x) = \frac{2xn+(-1)^n x^2}{n}$ *y* $f\colon A \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq 2x$. *Entonces* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a* f *en* A.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in A$. Entonces,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left|\frac{2xn + (-1)^n x^2}{n} - 2x\right| \\ &= \left|\frac{(-1)^n x^2}{n}\right| \leq \frac{25}{n}. \end{aligned}$$

Por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{25}{n} < \varepsilon$. Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. □

Proposición 8. *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones en* A *y* $f\colon A \to \mathbb{R}$. *Entonces,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a* f *en* A *si y solo si existe una sucesión* $(M)_{n\in\mathbb{N}}$, *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0, \quad M_n \geq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad y \quad \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq M_n.$$

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 9. *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones acotadas en* A *y* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *tal que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a* f *en* A. *Entonces,* f *es acotada en* A.

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 10. *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones continuas en* A *y* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *tal que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a* f *en* A. *Entonces,* f *es continua en* A.

Demostración. Sea $c \in A$ y $\varepsilon > 0$. Veamos que f es continua en c. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, para cada $x \in A$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. Además, cada f_n es continua, por lo que existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$, entonces $|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(c)| < \varepsilon/3$. Por lo tanto, si $x \in A$, tal que $|x - c| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(c)| &= |f(x) - f_{N+1}(x) + f_{N+1}(x) - f_{N+1}(c) + f_{N+1}(c) - f(c)| \\
&\leq |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(c)| + |f_{N+1}(c) - f(c)| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Proposición 11. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables en A y $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en A. Entonces, f es integrable en A y*

$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $A = [a, b]$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Por otro lado, como f_{N+1} es integrable. existe $P \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que

$$U(f_{N+1}, P) - L(f_{N+1}, P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como cada f_n es acotada, por la proposición 9, f es acotada. Entonces, cada $M_j(f, P)$ y $m_j(f, P)$ estan bien definidas. Además,

$$M_j(f, P) \leq M_j(f_{N+1}, P) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \qquad m_j(f, P) \geq m_j(f_{N+1}, P) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
U(f, P) &= \sum_{j=1}^{m} M_j(f, P)(t_j - t_{j-1}) \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \left(M_j(f_{N+1}, P) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right)(t_j - t_{j-1}) \\
&= U(f_{N+1}, P) + \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

De igual manera,

$$L(f, P) \geq L(f_{N+1}, P) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por lo tanto,

$$U(f,P) - L(f,P) \le U(f_{N+1},P) - L(f_{N+1},P) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Así, f es integrable. Entonces,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| &= \left|\int_a^b (f - f_n)\right| \\ &\le \int_a^b |f - f_n| \\ &< (b-a)\frac{\varepsilon}{4(b-a)} = \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

□

Proposición 12. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones diferenciables en A y $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f en A y f_n' converge uniformemente a alguna función g en A. Entonces, f es diferenciable en $[a,b]$ y para cada $x \in A$, $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.*

Demostración. Ejercicio. □

Ejercicios

1. Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es creciente y $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f en A. Demostrar que f es creciente.

2. Dar un ejemplo de una sucesión de funciones acotadas que converge puntualmente a una función no acotada.

3. Realizar un dibujo donde se ilustre la diferencia entre la convergencia puntual y la convergencia uniforme.

4. Demostrar la proposición 6.

5. Demostrar la proposición 8.

6. Enuncie una "condición de Cauchy" equivalente a la convergencia uniforme. Demuestre que esta condición es en efecto equivalente a la convergencia uniforme.

7. Demostrar la proposición 9.

8. Demostrar la proposición 12.

9. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ y $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, tal que para cada $x \in [0,1]$, $f(x) = 0$. Demuestre que f_n converge uniformemente a f.