Teorema fundamental del cálculo

Teorema 1 (Teorema del valor medio de Lagrange)**.** *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). Entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Proposición 2. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y supongamos que existe $c \in [a,b]$ tal que f es continua en c. Sea $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,*

$$F(t) := \int_a^t f.$$

Entonces, $F'(c) = f(c)$.

Demostración. Sea $h > 0$. Hacemos

$$M_h := \sup\{f(t)\colon\ t \in [c, c+h]\},$$
$$m_h := \text{ínf}\{f(t)\colon\ t \in [c, c+h]\}.$$

Como f es continua en c, se tiene

$$m_h h \leq F(c+h) - F(c) \leq M_h h.$$

Así, cuando $h \to 0$,

$$f(c) \leq \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_c^h f \leq f(c).$$

Por lo tanto, $F'(c) = f(c)$. □

Corolario 3 (Teorema fundamental del cálculo 1)**.** *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que existe $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable, tal que para cada $t \in [a,b]$, $g'(t) = f(t)$. Entonces,*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Demostración. Definimos F como en el teorema anterior.Luego, para cada $t \in [a,b]$,

$$F'(t) = g'(t) = f(t).$$

Por lo tanto, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $F(t) = g(t) + \alpha$. Para hallar el valor de α, evaluamos F en a:

$$0 = F(a) = g(a) + \alpha.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f = F(b) = g(b) - g(a).$$ □

A la función g del corolario anterior le llamaremos *primitiva* o *antiderivada* de f.

Ejemplo 4. *Sea* $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ *tal que para cada* $x \in [0,3]$*,*

$$f(x) = x^3.$$

Entonces,

$$\int_0^3 x^3 = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^3 = \frac{3^4}{4}.$$

Ejercicios

1. Indicar de manera explícita cómo se utiliza el teorema del valor medio de Lagrange en la demostración de la proposición 2.
2. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por la regla

$$G(x) \coloneqq \int_x^b f.$$

   Demuestre que G es continua y diferenciable en $[a,b]$. Calcule $G(b)$ y la derivada de G para cualquier $t \in [a,b]$.

Hallar las derivadas de las siguientes funciones (la regla de la cadena puede ser muy útil):

1. $$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$
2. $$\int_a^{x^2} \sin^3 t\,\mathrm{d}t.$$
3. $$\int_3^{\int_1^3 \sin^3 t\,\mathrm{d}t} \frac{1}{1+\sin^2 t + t^2}.$$
4. $$\int_{15}^x \int_8^y \frac{1}{1+t^2+\sin^3 t}\,\mathrm{d}t.$$
5. $$\sin\left(\int_1^x \sin\left(\int_0^y \sin^2 t\right)\right)\,\mathrm{d}t.$$