Derivadas de orden superior y fórmula de Taylor

Definición 1. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Si las derivadas parciales de f en a existen y son continuas, decimos que f es continuamente diefrenciable en a.*

Definición 2. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$, $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ tal que existen sus derivadas parciales en a. Definimos las derivadas parciales de orden 2 en a como*

$$\mathrm{D}_{k,j} f(a) \coloneqq \mathrm{D}_k(\mathrm{D}_j f(a)).$$

Si las derivadas parciales de orden 2 de f en a existen y son continuas, f se dice dos veces continuamente diferenciable.

De manera secuencial, si existen las derivadas parciales de orden k de f en a y todas son continuas, decimos que f es k veces continuamente diferenciable en a.

En adelante, trabajaraemos con los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
C_a^1(X, \mathbb{R}^m) &\coloneqq \{f\colon X \to \mathbb{R}^m\colon\ f \text{ es continuamente diferenciable en } a\},\\
C_a^2(X, \mathbb{R}^m) &\coloneqq \{f\colon X \to \mathbb{R}^m\colon\ f \text{ es dos veces continuamente diferenciable en } a\},\\
C_a^k(X, \mathbb{R}^m) &\coloneqq \{f\colon X \to \mathbb{R}^m\colon\ f \text{ es } k \text{ veces continuamente diferenciable en } a\}
\end{aligned}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto de funciones k veces continuamente diferenciables en X como

$$C^k(X, \mathbb{R}^m) \coloneqq \{f\colon X \to \mathbb{R}^m\colon\ f \text{ es } k \text{ veces continuamente diferenciable}\}.$$

Si $f \in C^k(X, \mathbb{R}^m)$, decimos que f es de clase C^k.

Si todas las derivadas parciales de f existen y son continuas, decimos que f es infinitamente diferenciable. Así, definimos

$$C^\infty(X, \mathbb{R}^m) \coloneqq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(X, \mathbb{R}^m).$$

Proposición 3. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciable en a. Entonces, f es diferenciable.*

Proposición 4. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f \in C^2(X, \mathbb{R})$. Entonces, para cada $j, k \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$\mathrm{D}_{jk} f(a) = \mathrm{D}_{kj} f(a).$$

Demostración. Para la demostración, basta pensar en $n = 2$. Sea $\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde para cada $(h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda(h, j) := f(a_1, a_2) - f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2 + k) + f(a_1 + h, a_2 + k).$$

Ahora, para cada $k \in \mathbb{R}$ hagamos $\varphi_k\colon bR \to \mathbb{R}$, donde para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_k(t) := f(t, a_2 + k) - f(t, a_2).$$

Notemos que $\varphi_k(a + h) - \varphi_k(a) = \lambda(h, k)$. Además φ_k es derivable y continua. Por el teorema del valor medio, existe $\xi \in (a, a + h)$ tal que

$$\lambda(h, k) = \varphi_k(a + h) - \varphi_k(a) = \varphi_k'(\xi)h = (\mathrm{D}_1 f(\xi, a_2 + k) - \mathrm{D}_1 f(\xi, a_2))h.$$

Como $f \in C^2(X, \mathbb{R})$, $\mathrm{D}_1 f(x)$ es continua y derivable. Aplicando el teorema del valor medio de nuevo, existe $\nu \in (a_2, a_2 + k)$ tal que

$$\lambda(h, k) = (\mathrm{D}_1 f(\xi, a_2 + k) - \mathrm{D}_1 f(\xi, a_2))h = \mathrm{D}_{21} f(\xi, \nu)hk.$$

Así, para cada $t \in \mathbb{R}$, existe $q_1 \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lambda(t, t) = \mathrm{D}_{21} f(q_1)t^2.$$

Siguiendo el mismo procedimiento pero con $\mathrm{D}_{12} f(x)$, concluimos que existe $q_2 \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lambda(t, t) = \mathrm{D}_{12} f(q_2)t^2.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{\lambda(t, t)}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \mathrm{D}_{21} f(p_1) = \mathrm{D}_{21} f(a) \\ \lim_{t \to 0} \frac{\lambda(t, t)}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \mathrm{D}_{12} f(p_2) = \mathrm{D}_{12} f(a). \end{aligned}$$

Como el límite de una función es único, concluimos que $\mathrm{D}_{21} f(a) = \mathrm{D}_{12} f(a)$. $\square$

Definición 5. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Un multi–indice es $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*
Definimos la longitud de un multi–índice como

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Definimos el factorial del multi–índice como

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y α un milti–índice de dimensión n. Entonces,

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Sea $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ and α a multi–idice de dimensión k. Entonces, para cada $x \in X$

$$D^\alpha f(x) := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_k^{\alpha_k} f(x).$$

Proposición 6 (Fórmula de Taylor)**.** *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierno, $k \geq 1$, $f \in C^{k+1}(X, \mathbb{R})$ y $a \in X$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in B(a, \delta)$ existe $\xi \in B(a, \delta)$ tal que*

$$f(x) = f(a) + \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^\alpha.$$

Demostración. Como X es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq X$. Sea $x \in B(a, \delta)$. Hacemos $\sigma \colon [0,1] \to X$ y $h \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tales que para cada $t \in [0,1]$, $\sigma(t) = a + t(x-a)$ y $h(t) = f(\sigma(t))$. Así, $\sigma(0) = a$, $\sigma(1) = x$, $h(0) = f(a)$ y $h(1) = f(x)$.
Notamos que $h \in C^{k+1}([0,1], \mathbb{R})$. Entonces, existe $s \in (0,1)$ tal que

$$h(1) = h(0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{h^{(j)}(0)}{j!} + \frac{f^{(k+1)}(s)}{(k+1!)}. \tag{1}$$

Además, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
h'(0) &= \sum_{j_1=1}^{n} D_{j_1} f(a)(x_{j_1} - a_{j_1}) = \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha (x-a)^\alpha, \\
h''(0) &= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} D_{j_2} D_{j_1} f(a)(x_{j_1} - a_{j_1})(x_{j_2} - a_{j_2}) = \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha. \\
&\ \vdots \\
h^{(k)}(0) &= \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha, \\
h^{(k+1)}(0) &= \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (1), tenemos

$$f(x) = f(a) + \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^\alpha. \qquad \square$$

Ejercicios

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

   Calcular $\mathrm{D}_{12} f(0)$ y $\mathrm{D}_{21} f(0)$. ¿Porqué se obtienen estos valores?

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2.$$

   Calcular las derivadas de orden 2 de f. Escribir los resultados utilizando la notación de multi–índice.

3. Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$ para la función del ejercicio anterior.

4. Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden al rededor de un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$ para $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x) \coloneqq \mathrm{e}^{x_1} \cos(x_2).$$