Derivadas parciales

Definición 1. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Sea $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$. Definimos la derivada direccional de f en a en la dirección u, como*

$$\mathrm{D}_u f(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}.$$

Ejemplo 2. *Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^2$,*

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Calcular las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

Demostración. Sea $u \in \mathbb{R}^2$, tal que $\|u\| = 1$. Entonces,

$$\mathrm{D}_u f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 u_1 u_2^2}{t(t^2 u_1^2 + t^4 u_2^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + t^2 u_2^4}.$$

Luego,

$$\mathrm{D}_u f(0) = \begin{cases} 0, & u_1 = 0; \\ \frac{u_2^2}{u_1}, & u_1 \neq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, la derivada direccional en 0 existe en todas direcciones. Sin embargo, f no es diferenciable en 0, debido a que f no es continua en 0. □

Proposición 3. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Si f es diferenciable en a, entonces existe $\mathrm{D}_u f(a)$ para cada $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$.*

Demostración. Como f es diferenciable en a, existe $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ tal que φ es continua en a, $\varphi(a) = 0$ y para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi(a).$$

Sea $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_u f(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{d}f(a)(tu) + \|tu\|\varphi(a+tu)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t\,\mathrm{d}f(a)(tu) + |t|\|u\|\varphi(a+tu)}{t} = \mathrm{d}f(a)u. \end{aligned}$$

□

Definición 4. *Sea $(e_j)_{j=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ definimos la derivada parcial de f respecto a x_j como*

$$\mathrm{D}_j f(a) := \mathrm{D}_{e_j} f(a).$$

Para las derivadas parciales, es común encontrar en libros de texto la notación $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Proposición 5. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f \colon X \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en a. Entonces,*

$$\mathrm{d}f(a) = [\mathrm{D}_j f_k(a)]_{j,k=1}^{n,m}.$$

Demostración. Para cada $x \in X$, $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$. Entonces,

$$\mathrm{d}f(a)x = \sum_{j=1}^{n} x_j \,\mathrm{d}f(a)e_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \,\mathrm{D}_j f(a).$$

Notemos que $\mathrm{D}_j f(a) = (\mathrm{D}_j f_1(a), \ldots, \mathrm{D}_j f_m(a))$. Por lo tanto,

$$\mathrm{d}f(a) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 f_1(a) & \cdots & \mathrm{D}_n f_1(a) \\ \mathrm{D}_1 f_2(a) & \cdots & \mathrm{D}_n f_2(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_1 f_m(a) & \cdots & \mathrm{D}_n f_m(a) \end{bmatrix}. \qquad \square$$

La matriz asociada a la transformación $\mathrm{d}f(a)$ se llama matriz jacobiana de f en a.

Proposición 6 (Regla de la cadena)**.** *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$, $f \colon X \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en a, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que $f[X] \subseteq Y$, $g \colon Y \to \mathbb{R}^p$ diferenciable en $f(a)$. Entonces, $g \circ f \colon X \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en a y*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a))\,\mathrm{d}f(a).$$

Demostración. Como f es diferenciable en a, existe $\varphi \colon X \to \mathbb{R}^m$ tal que para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi(x).$$

Por otro lado, como g es diferenciable en $f(a)$, existe $\psi \colon Y \to \mathbb{R}^p$ tal que para cada $y \in Y$,

$$g(y) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a))(y - f(a)) + \|y - f(a)\|\psi(y).$$

Como $g[X] \subseteq Y$, para cada $x \in X$,

$$g(f(x)) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a))(f(x) - f(a)) + \|f(x) - f(a)\|\psi(f(x)).$$

Luego,

$$g(f(x)) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a))(\mathrm{d}(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)) + \|\mathrm{d}(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)\|\psi(f(x)).$$

Hacemos $\Psi\colon X \to \mathbb{R}^p$, donde para cada $x \in X$,

$$\Phi(x) := \begin{cases} \frac{\|\mathrm{d}(a)(x-a)+\varphi(x)\|x-a\|\|\|\psi(f(x))\|}{\|x-a\|}, & x \neq a; \\ 0, & x = a. \end{cases} \tag{1}$$

Φ es continua en a y $\Phi(a) = 0$ y para cada $x \in X$. Entonces,

$$g(f(x)) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a))\mathrm{d}(a)(x-a) + \mathrm{d}f(a)\varphi(x)\|x-a\| + \|x-a\|\Phi(x).$$

Como φ y Φ son continuas en a, y $\varphi(a) = \Phi(a) = 0$, tenemos que $g \circ f$ es diferenciable en a y $\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a))\mathrm{d}(a)$. $\square$

Ejercicios

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) := \mathrm{e}^{-x_1^2 - x_2^2}$. Calcular las derivadas parciales de f y construir su matríz jacobiana.

2. Demostrar que la función (1) es continua en a.

3. Calcular la derivada de $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ en un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$, donde

$$f(u,v) = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}, \quad u(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y}, \quad v(x,y) = \mathrm{e}^{xy}.$$

4. Hacer un diagrama que explique cómo se relacionan las funciones continuas, funciones diferenciables y funciones continuamente diferenciables.