1. Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Definición 1 (D1)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Decimos que f es diferenciable en a si existe una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Th\|}{\|h\|} = 0. \tag{1}$$

Definición 2 (D2)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Decimos que f es diferenciable en a si existe una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y una función $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ tales que φ es continua en a, $\varphi(a) = 0$ y para cada $x \in X$,*

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x). \tag{2}$$

La transformación lineal T en ambas definiciones, se llama diferencial de f en a.

Estas dos definiciones son aparentemente muy distintas. Veamos que son dos formas de referirnos al mismo objeto. Es decir que equivalentes.

Proposición 3. *La definición 1 y la definición 2 son equivalentes.*

Demostración. Revisaremos ambas implicaciones.

1 $\Longrightarrow$ 2) Hacemos $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$, donde para cada $x \in X$,

$$\varphi(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|}, & x \neq a; \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Como se satisface (1), haciendo $h \coloneqq x - a$, φ es continua en a, y $\varphi(a) = 0$. Además, para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x).$$

2 $\Longrightarrow$ 1) Como se satisface (2), para cada $x \in X$,

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}.$$

Haciendo $h \coloneqq x - a$, como φ es continua en a y $\varphi(a) = 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} = \lim_{h\to 0} \|\varphi(a+h)\| = 0. \qquad \square$$

En particular, la definición 2 es equivalente a la definición de derivabilidad para funciones de una variable.

Definición 4. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $a \in I$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$. Decimos que f es derivable en a si existe el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En ese caso, denotamos al limite como $f'(a)$.

En la mayoría de las ocasiones será más comodo trabajar con la definición 2, aunque en los libros de texto es más común encontrar la definición 1. Notemos también, que de la definición 2 es inmediato ver que si f es diferenciable en a, entonces es continua en a, por la continuidad de T y de φ.

Ejemplo 5. *Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) \coloneqq x_1 x_2$ y sea $a \in \mathbb{R}^2$. ¿Es f diferenciable en a?*

Demostración. Supongamos que f es diferenciable en a. Entonces, existen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que φ es continua, $\varphi(a) = 0$ y para cada $x \in \mathbb{R}^2$,

$$x_1 x_2 = a_1 a_2 + T_1(x_1 - a_1) + T_2(x_2 - a_2) + \|x - a\| \varphi(x).$$

Consideramos la sucesión $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k \coloneqq \left(a_1 + \frac{1}{k}, a_2\right)$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + \frac{a_2}{k} &= a_1 a_2 + T_1 \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \varphi(x^k) \\ \frac{a_2}{k} &= T_1 \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \varphi(x^k) \\ a_2 &= T_1 + \varphi(x^k). \end{aligned}$$

Pasando al límite, cuando $k \to \infty$, tenemos $a_2 = T_1$. Razonando de manera similar para T_2, tenemos que $a_1 = T_2$. Por lo tanto, f es diferenciable en a y

$$T = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Ejemplo 6. *Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función constante. Entonces, f es diferenciable en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Hagamos $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $Tx = 0$, y $\varphi(x) = 0$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = f(a) + T(x - a) + \|x - a\| \varphi(x).$$

Por lo tanto, f es diferenciable. $\square$

Ejemplo 7. *Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces, f es diferenciable en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Hagamos $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $Tx = f(x)$ y $\varphi(x) = 0$. Luego, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(a) + T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x) = f(a) + f(x) - f(a) = f(x).$$

Por lo tanto, f es diferenciable en $\mathbb{R}^n$. $\square$

Proposición 8. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en a. Entonces, la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y la función $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ de la definición 2 son únicas.*

Demostración. Supongamos que existe otra transformación lineal $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y otra función $\psi\colon X \to \mathbb{R}^m$ tales que ψ es continua en a, $\psi(a) = 0$ y para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + S(x-a) + \|x-a\|\psi(x).$$

Entonces, para cada $x \in X$,

$$(T-S)(x-a) = \|x-a\|(\psi(x) - \varphi(a)).$$

Sea $(e_j)_{j=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sea $j \in \{1,\dots,n\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos $x^k := a + \frac{1}{k}e_j$. Entonces, $\lim_{k\to\infty} x^k = a$. Además, X es abierto, por lo que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(a,\varepsilon_0) \subseteq X$. Por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $x^n \in B(a,\varepsilon_0)$. Así, para todo $n > N$,

$$\begin{gathered}(T-S)(x^k - a) = \|x^k - a\|(\psi(x^k) - \varphi(x^k))\\ (T-S)\left(\frac{e_j}{k}\right) = \frac{1}{k}(\psi(x^k) - \varphi(x^k))\\ (T-S)e_j = \psi(x^k) - \varphi(x^k).\end{gathered}$$

Como T, S, φ y ψ son continuas, al pasar al límite,

$$(T-S)e_j = 0.$$

Por lo tanto, $Te_j = Se_j$. Como j fue arbitrario, la igualdad se tiene para cada elemento de la base. Luego, $T = S$ y $\varphi = \psi$. $\square$

En adelante, la derivada de f en a será denotada como $\mathrm{d}f(a)$.

Proposición 9. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Supongamos que $f = (f_1, \dots, f_m)$, donde para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, $f_j\colon X \to \mathbb{R}$. Entonces, f es diferenciable en a si y solo si, para cada $j \in \{1, \dots, \}$, f_j es diferenciable en a.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Suponemos que f es diferenciable en a. Entonces existe $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ tal que φ continua en a, $\varphi(a) = 0$ y para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi(x). \tag{3}$$

Note que $\mathrm{d}f(a) = (\mathrm{d}f(a)_1, \dots, \mathrm{d}f(a)_m)$ y $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Además, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, φ_j es continua en a, $\varphi_j(a) = 0$ y $\mathrm{d}f(a)_j$ es lineal. Por la igualdad (3), para cada $x \in X$ y para cada $j \in \{1, \dots, m\}$,

$$f_j(x) = f_j(a) + \mathrm{d}f(a)_j(x-a) + \|x-a\|\varphi_j(a).$$

Por lo tanto, f_j es diferenciable.

$\Longleftarrow$) Ahora, suponemos que para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, f_j es diferenciable. Entonces, existe $\varphi_j\colon X \to \mathbb{R}^m$ tal que φ_j es continua en a, $\varphi_j(a) = 0$ y para cada $x \in X$,

$$f_j(x) = f_j(a) + \mathrm{d}f_j(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi_j(x).$$

Hacemos $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ y $T\colon X \to \mathbb{R}^m$, donde $\varphi(x) = (\varphi_1(a), \dots, m\varphi_m(a))$ y $Tx \coloneqq (\mathrm{d}f_1(a), \dots, \mathrm{d}f_m(a))$. Luego, para cada $x \in X$,

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{d}f_1(a) \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_m - a_m \end{bmatrix} + \|x-a\| \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{bmatrix}.$$

Esto es, $f(x) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)$. Por lo tanto, f es diferenciable en a.

$\square$

Proposición 10. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in \mathbb{R}^m$ y $f, g\colon X \to \mathbb{R}^m$. Entonces, se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

a) *$f + g$ es diferenciable en a y*

$$\mathrm{d}(f+g)(a) = \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a).$$

b) *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. αf es diferenciable en a y*

$$\mathrm{d}(\alpha f)(a) = \alpha\,\mathrm{d}f(a).$$

c) Si $m = 1$, fg es diferenciable en a y

$$\mathrm{d}(fg)(a) = g(a)\,\mathrm{d}f(a) + f(a)\,\mathrm{d}g(a).$$

d) Si $m = 1$, $\frac{f}{g}$ es diferenciable en a y

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)\,\mathrm{d}f(a) - f(a)\,\mathrm{d}g(a)}{g(a)^2}.$$

Ejercicios

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es derivable en a si y solo si f es diferenciable en a.

2. Sean $a \in \mathbb{R}^2$ y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq x_1x_2$. Demostrar que f es diferenciable en a.

3. Sean $a \in \mathbb{R}^2$ y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq x_1^2 + x_2^2$. Probar que f es diferenciable y hallar $\mathrm{d}f(a)$.

4. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq \frac{x_1x_2^2}{x_1^2+x_2^4}$. ¿Es f diferenciable en 0?.

5. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Utilizando la definición 1, demuestre que si f es diferenciable en a entonces es continua en a.

6. Demostrar los incisos a) y b) de la proposición 10.