Preliminares

Teorema 1. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, K es compacto si y solo si K es cerrado y acotado.*

Funciones continuas en $\mathbb{R}^n$

Definición 2. *Sean $K \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f\colon K \to \mathbb{R}^m$, $a \in K$ y $l \in \mathbb{R}^m$. Decimos que l es el límite de f cuando x tiende a a si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta$, entonces $\|f(x) - l\| < \varepsilon$.*

Si el límite de f cuando x tiende a a es $f(a)$, decimos que f es contínua en a.

Si f es continua en cada punto de K, decimos que f es continua en K.

Ejemplo 3. *Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq x_1 x_2$. Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}^2$. Para cada $x \in \mathbb{R}^2$ estimamos la diferencia:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |x_1 x_2 - a_1 a_2| \\ &\leq |x_2||x_1 - a_1| + |a_1||x_2 - a_2| \\ &\leq (\|x\| + \|a\|)\|x - a\|. \end{aligned}$$

Supongamos que $\|x - a\| < 1$. Entonces, $\|x\| - \|a\| \leq \|x - a\| < 1$. Por lo que, para cada $x \in B(a, 1)$, $\|x\| < 1 + \|a\|$. Haciendo $\delta \coloneqq \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2\|a\|}\right\}$, tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq (\|x\| + \|a\|)\|x - a\| \\ &\leq (1 + 2\|a\|)\|x - a\| < \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Proposición 4. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ y $a \in X$. Entonces, f es continua en a si y solo si para cada sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim_{k\to\infty} x^k = a$, se tiene $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(a)$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que f es continua en a. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim_{k\to\mathbb{N}} x^k = a$. Queremos verificar que $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(a)$. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en a, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta$ entonces $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Como $\lim_{k\to\mathbb{N}} x^k = a$, para δ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces, $\|x^n - a\| < \delta$. Por lo tanto, si $n > N$, $\|f(x^n) - f(a)\| < \varepsilon$. Es decir, $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(a)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que para cada sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\mathbb{N}} x^k = a$, se satisface $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(a)$. Supongamos además, que f no es continua en a. Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\delta > 0$, si $\|x - a\| < \delta$ entonces $\|f(x) - f(a)\| \geq \varepsilon_0$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $x^k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right)$. Entonces, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $\lim_{k\to\infty} x^k = a$, por lo que $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(a)$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces, $\|f(x^n) - f(a)\| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Por otro lado, $\varepsilon_0 \leq \|f(x^n) - f(a)\|$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, f debe ser continua en a.

□

Definición 5. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$. Definimos las funciones:*

1. *$f + g\colon X \to \mathbb{R}^n$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x).$$

2. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Hacemos $\alpha f\colon X \to \mathbb{R}^n$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$(\alpha f)(x) \coloneqq \alpha f(x).$$

3. *Si $m = 1$, hacemos $fg\colon X \to \mathbb{R}^n$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$(fg)(x) \coloneqq f(x)g(x).$$

4. *Si $m = 1$, sea $D_g \coloneqq \{x \in X\colon\ g(x) \neq 0\}$. Hacemos $\frac{f}{g}\colon X \to \mathbb{R}$, donde para cada $x \in D_g$,*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \coloneqq \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Proposición 6. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in X$ y $f, g\colon X \to \mathbb{R}^m$ continuas en a. Entonces,*

1. *$f + g$ es continua en a.*

2. *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, αf es continua en a.*

3. *Si $m = 1$, fg es continua en a.*

Demostración. Ejercicio □

Proposición 7. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Entonces, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ es continua en a si y solo si para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, f_j es continua en a.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta$, $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Luego, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$|f_j(x) - f(a)| \leq \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, f_j es continua en a.

$\Longleftarrow$) Supongamos que para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, f_j es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$. Luego, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ existe $\delta_j > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta_j$, entonces se tiene $|f_j(x) - f_j(a)| < \frac{\varepsilon}{m}$. Hagamos $\delta \coloneqq \text{mín}\{\delta_j\}_{j=1}^{m}$. Si $\|x - a\| < \delta$, entonces

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \sum_{j=1}^{m} |f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon. \qquad \square$$

Proposición 8. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $a \in X$, $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ y $g\colon Y \to \mathbb{R}^p$ tales que $f[X] \subseteq Y$, f es continua en a y g es continua en $f(a)$. Entonces, $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^p$ es continua en a.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, g es continua en $f(a)$. Luego, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\|y - f(a)\| < \delta_1$, entonces $\|g(y) - g(f(a))\| < \varepsilon$. Como f es continua en a, para δ_1 existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta_2$, entonces $\|f(x) - f(a)\| < \delta_1$. Por lo tanto, si $\|x - a\| < \delta_1$, tenemos que $\|g(f(x)) - g(f(a))\| < \varepsilon$. $\square$

Proposición 9. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Entonces, f es continua en X si y solo si para cada abierto $W \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f^{-1}[W] = X \bigcap U.$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que f es continua en X y que $f^{-1}[W] \neq \varnothing$. Como W es abierto, para cada $x \in f^{-1}[W]$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon_x) \subseteq W$. Como f es continua, para cada ε_x existe $\delta_x > 0$ tal que si $z \in B(x, \delta_x)$ entonces, $f(z) \in B(f(x), \varepsilon_x)$. Hagamos

$$U \coloneqq \bigcup_{x \in f^{-1}[W]} B(x, \delta_x).$$

Entonces, U es abierto y $f^{-1}[W] \subseteq U \bigcap X$. Sea $y \in U \bigcap X$. Existe $x \in U$ tal que $y \in B(x, \delta_x)$. Luego, $f(y) \in B(f(x), \varepsilon_x) \subseteq W$. Por lo tanto, $y \in f^{-1}[W]$. Así, tenemos la contención $U \bigcap X \subseteq f^{-1}[W]$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que para cada abierto $W \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}[W] = X \bigcap U$. Sean $a \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $B(f(a), \varepsilon)$ es abierto en $\mathbb{R}^m$, existe U abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)] = U \bigcap X.$$

Entonces, $a \in U \bigcap X$. Como U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq U$.

$\square$

Proposición 10. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $f\colon K \to \mathbb{R}^m$. Entonces, $f[K]$ es compacto.*

Demostración. Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una cubierta de $f[K]$. Por la proposición 9, para cada $\alpha \in I$ existe $W_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

$$f^{-1}[U_\alpha] = W_\alpha \bigcap K.$$

Si $x \in K$, existe $\alpha_0 \in I$ tal que $f(x) \in U_{\alpha_0}$. Luego, $x \in f^{-1}[U_{\alpha_0}] = W_{\alpha_0} \bigcap K \subseteq W_{\alpha_0}$. Como K es compacto, existen $p \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in I$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} U_{\alpha_j}$. Sea $y \in f[K]$. Entonces, existe $x \in K$ tal que $f(x) = y$. Luego, existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $x \in W_{\alpha_j}$. Por lo que $f(x) \in U_{\alpha_j}$. Así, $f[K] \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} U_{\alpha_j}$. $\square$

Proposición 11. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $f\colon K \to \mathbb{R}$ continua en K. Entonces, existen $a, b \in K$ tales que*

$$f(a) = \sup_{x\in K} f(x), \qquad f(b) = \inf_{x\in K} f(x),$$

Demostración. Por la proposición 10, $f[K]$ es compacto. Por el teorema 1, $f[K]$ es cerrado y acotado. Como $f[K]$ es acotado, existen $M \coloneqq \sup_{x\in K} f(x)$ y $m \coloneqq \inf_{x\in K} f(x)$. Como $f[K]$ es cerrado, $M, m \in f[K]$. Luego, existen $a, b \in K$ tales que $f(a) = M$ y $f(b) = m$. $\square$

Ejercicios

1. Demuestre la proposición 6.

2. Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Demuestre que T es continua en $\mathbb{R}^n$.

3. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \coloneqq \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\}$. Demuestre que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es un espacio vectorial.

4. Sea $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \coloneqq \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : f \text{ es continua en } \mathbb{R}^n\}$. Demuestre que $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es un subespacio de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

5. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Entonces, f es continua si y solo si para cada cerrado $D \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un cerrado $C \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que $f^{-1}[C] = B \bigcap X$.

6. Demuestre la proposición 10, mostrando que $f[K]$ es secuencialmente compacto.

7. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua. Demostrar que $A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ f(x) \neq 0\}$ es abierto.

8. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$. Demuestre que f no es continua en $(0, 0)$.