Definición 1. *Sean X, Y conjuntos. Una función entre X y Y, o de X a Y es una regla de asignación f tal que a cada $x \in X$ le es asignado un único $y \in Y$. En este caso, escribiremos $f\colon X \to Y$. Si $x \in X$, la asignación para x bajo f se denota por $f(x)$.*

Definición 2. *Sea $f\colon X \to Y$ una función. Sea $A \subseteq X$. La imagen de A bajo f es el conjunto*

$$f[A] \coloneqq \{y \in Y\colon\ \exists\, x \in A,\ f(x) = y\}. \tag{1}$$

Sea $B \subseteq Y$. La imagen inversa de B bajo f es el conjunto

$$f^{-1}[B] \coloneqq \{x \in X\colon\ f(x) \in B\}. \tag{2}$$

Proposición 3. *Sea $f\colon X \to Y$ una función y $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos. Entonces,*

i) $f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right] = \bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$.

ii) $f\left[\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha\right] \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$.

Demostración. i) Sea $y \in f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right]$. Entonces, existe $x \in \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Luego, existe $\alpha \in I$ tal que $x \in U_\alpha$, por lo que $y \in f\left[U_\alpha\right]$. Así, $y \in \bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$. Es decir, $f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right] \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$.

Sea $y \in \bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$. Entonces, existe $\alpha \in I$ tal que $y \in f\left[U_\alpha\right]$. Luego, existe $x \in U_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Pero $x \in \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$. Por lo tanto, $y \in f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right]$. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right] \subseteq f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right]$.

ii) Sea $y \in f\left[\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha\right]$. Entonces, existe $x \in \bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Es decir, para todo $\alpha \in I$, $x \in U_\alpha$. Luego, para todo $\alpha \in I$, $y \in f\left[U_\alpha\right]$. Por lo tanto, $y \in \bigcap_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$.

$\square$

Proposición 4. *Sea $f\colon X \to Y$ una función y $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos. Entonces,*

i) $f^{-1}\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right] = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}\left[U_\alpha\right]$.

ii) $f^{-1}\left[\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha\right] = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}\left[U_\alpha\right]$.

Demostración. Ejercicio. $\square$

Ejemplo 5. *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Sean $A \coloneqq (-1, 2]$, $B \coloneqq [-3, 0)$ $C \coloneqq [1, 2]$. Calcular $f[A]$, $f[B]$, $f[A \cap B]$ y $f^{-1}[C]$.*

Demostración. Si $y \in f[A]$, existe $x \in A$ tal que $x^2 = y$. Es decir, $x \in (-1, 2]$. Entonces, $x^2 \in f[A]$ si y solo si $-1 < x \leq 2$. Luego, $1 < x^2 \leq 4$. Por lo tanto, $f[A] = (1, 4]$.

Si $y \in f[B]$, existe $x \in B$ tal que $x^2 = y$. Razonando como en el caso anterior, tenemos $f[B] = (0, 9]$.

$A \cap B = (-1, 0)$. Entonces, $f[A \cap B] = (0, 1)$. Por otro lado, es importante observar que $f[A] \cap f[B] = (1, 3]$. Por lo tanto, $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$.

Si $x \in f^{-1}[C]$, existe $y \in C$ tal que $x^2 = y$. Es decir, $x^2 \in [1, 2]$. Luego, $1 \leq x^2 \leq 2$. Aplicando la raíz cuadrada tenemos $1 \leq |x| \leq \sqrt{2}$. Separando las desigualdades utilizando las propiedades del valor absoluto, $-\sqrt{2} \leq x \leq -1$ o $1 \leq x \leq \sqrt{2}$. Por lo tanto, concluimos que $x \in [-\sqrt{2}, -1] \bigcup [1, \sqrt{2}]$. $\square$

Definición 6. *Sea $f\colon X \to Y$ una función.*

i) f es inyectiva si para todos $x, y \in X$, si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.

ii) f es suprayectiva si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

iii) f es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.

Ejercicios

1. Demostrar la proposición 4.
2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq 2x_1 - x_2$ y sea $B = \{0\}$. Hallar $f^{-1}[B]$.
3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq x_1^2 - x_2^2$ y sean $B \coloneqq 1$, $C = (-2, 0)$. Hallar $f^{-1}[B]$ y $f^{-1}[C]$.
4. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^2$. Demostrar que f no es inyectiva ni suprayectiva.
5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^3$. Demostrar que f es biyectiva.