Funciones uniformemente continuas

Definición 1. *Sea* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $f\colon X \to \mathbb{R}^m$*. Decimos que* f *es uniformemente continua si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todos* $x, y \in X$*, si* $\|x - y\| < \delta$*, entonces* $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$*.*

Ejemplo 2. *Sea* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una transformación lineal. Entonces,* T *es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $(e_j)_{j=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$. Hagamos $M := \max\{\|Te_1\|, \dots, \|Te_n\|\}$. Luego, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^n x_j T(e_j)\right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \, \|T(e_j)\| \leq n^2 \|x\| M.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Hacemos $\delta = \frac{\varepsilon}{n^2 M}$. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, tales que $\|x - y\| < \delta$. Entonces,

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq n^2 M \|x - y\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, T es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$. □

Proposición 3. *Sea* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ *uniformemente continua en* X*. Entonces,* f *es continua en* X*.*

Demostración. Sea $a \in X$, y $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta$ entonces, $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Sin embargo, esta es la definición de continuidad en a. Por lo tanto, f es continua en a. □

Proposición 4. *Sea* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *compacto y* $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ *continua en* K*. Entonces,* f *es uniformemente continua.*