Multiplicadores de Lagrange

En ocasiones es necesario encontrar máximos o mínimos de funciones sujetas a ciertas restricciones. En esos casos es útil la siguiente proposición.

Proposición 1 (Multiplicadores de Lagrange)**.** *Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, $a \in \mathbb{R}^n$ y $f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Supongamos que f restringida a $g_1, \ldots, g_n$ tiene un máximo o mínimo en a. Entonces, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathrm{d}f(a)^\top = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (\mathrm{d}g(a))^\top$$

Ejemplo 2. *Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla $f(x) \coloneqq 2 + x_1^2 + x_2^2$, y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante $g(x) \coloneqq x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 - 1$. Hallar los máximos y mínimos de f sujeta a $g(x) = 0$.*

Demostración. Primero calculamo $\mathrm{d}f$ y $\mathrm{d}g$ en puntos arbitrarios.

$$\mathrm{d}f(x)^\top = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{d}g(x)^\top = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces, planteamos la igualdad:

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix}.$$

Y obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 &= \lambda 2x_1, \\ 2x_2 &= \lambda \frac{1}{2} x_2. \end{aligned}$$

De la primera ecuación, $\lambda = 1$. Sustituyendo en la segunda ecuación, $x_2 = 0$. Como buscamos los máximos y mínimos de f sujeta a $g(x) = 0$, sustituimos x_2 en g:

$$0 = x_1^2 - 1.$$

Por lo tanto, $x_1 = 1$ ó $x_1 = -1$. Entonces, los puntos críticos de f sujeta a $g(x) = 0$ para $\lambda = 1$, son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

Por otro lado, utilizando la segunda ecuación del sistema de ecuaciones, $\lambda = 4$. Sustituyendo en la primer ecuación, $x_1 = 0$. Luego, utilizando $g(x) = 0$, tenemos

$$0 = \frac{1}{4}x_2^2 - 1.$$

Luego, $x_2 = 2$ ó $x_2 = -2$. Por lo tanto, los puntos críticos de f sujeta a $g(x) = 0$ para $\lambda = 4$, son $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

Evaluando en f, determinamos si son máximos o mínimos:

$$\begin{aligned} f(1,0) &= 3, \\ f(-1,0) &= 3, \\ f(0,2) &= 4, \\ f(0,-2) &= 4. \end{aligned}$$

Así, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ son mínimos, mientras que $(0, 2)$ y $(0, -2)$ son máximos. □

Ejercicios

1. En los siguientes ejercicios, hallar los máximos y minímos de f sujeta a $g(x) = 0$. Además, dar una interpretación geométrica de f y las restricciones.

   a Sean $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $f(x) \coloneqq x_1 + x_3$ y $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - 1$.

   b) $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $f(x) \coloneqq x_1^2 - x_2^2$ y $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $g(x) \coloneqq x_1^2 + x_2^2 - 1$.

   c) $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $f(x) \coloneqq 3x_1^2 + x_2$, $g_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $g_1(x) \coloneqq 4x_1 - 3x_2 - 9$ y $g_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $g_2(x) \coloneqq x_1^2 - x_3^2 - 9$.

2. Consideremos la recla $Ax_1 + Bx_2 = C$ en $\mathbb{R}^2$ y sea $p \in \mathbb{R}^2$. Encontrar el punto de la recta más cercano a p.