Máximos y mínimos de una función de $\mathbb{R}^n$

Formas cuadráticas

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial real. Una forma bilineal en V es una función $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ si es lineal respecto a cada argumento. Es decir,*

$$\begin{aligned} f(\alpha u + v, w) &= \alpha f(u, w) + f(v, w) && \forall\, u, v, w \in V,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\ f(u, \alpha w + v) &= \alpha f(u, w) + f(v, w) && \forall\, u, v, w \in V,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. *El producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ es una forma bilineal en $\mathbb{R}^n$.*

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Definimos $f_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$f_A(x, y) \coloneqq x^\top A y.$$

Entonces, f_A es una forma bilineal en $\mathbb{R}^n$.

Definición 3. *Sea V un espacio vectorial real. Una función $q\colon V \times V \to \mathbb{R}$ se llama forma cuadrática si existe una forma bilineal tal que para cada $x \in V$,*

$$q(x) = f(x, x).$$

En este caso, decimos que q es la forma cuadrática asociada a la forma bilineal f.

Ejemplo 4. *La norma 2 en $\mathbb{R}^n$ es la forma cuadrática asociada al producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$.*

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz. Entonces, la forma cuadrática asociada a la forma bilineal f_A es $q_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$q_A(x) \coloneqq f_A(x, x) = x^\top A x.$$

En este caso, decimos que q_A es la forma cuadrática asociada a la matriz A.

Definición 5. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A se llama matriz definida positiva si la forma cuadrática asociada a A es positiva definida:*

$$x^\top A x > 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

En este caso, escribimos $A > 0$.

Definición 6. *Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. El menor principal de A ubicado en los renglones y columnas $i_1, \ldots, i_k$ se define mendiante*

$$M_A\left(i_1 \cdots i_k\right) \coloneqq \det(A_{\{i_1,\ldots,i_k\}\times\{i_1,\ldots,i_k\}}).$$

Proposición 7 (Criterio de Sylvester). *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces,*

a) *$A > 0$ si y solo si, los menores principales de A son positivos.*

b) *$A < 0$ si y solo si, todos los menores de esquina de orden impar son negativos y todos los menores de esquina de orden par son positivos.*

Puntos críticos de una función

Definición 8. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f\colon X \to \mathbb{R}$.*
Si existe $a \in X$ tal que para cada $x \in X$, si $f(x) \leq f(a)$, decimos que f tiene un máximo absoluto en a.
Si existe $a \in X$ tal que para cada $x \in X$, si $f(x) \geq f(a)$, decimos que f tiene un mínimo absoluto en a.
Si existe $a \in X$ y $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \subseteq X$. Si para cada $x \in B(a,\delta)$, $f(x) \geq f(a)$, decimos que f tiene un mínimo local en a.
Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f \in C^1(X,\mathbb{R})$. Supongamos que $\mathrm{d}f(a) = 0$, es decir, que para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$, $\mathrm{D}_j f(a) = 0$. Entonces, decimos que a es un punto crítico de f.

Proposición 9. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f \in C^1(X,\mathbb{R})$. Supongamos que a es mínimo local de f. Entonces, a es punto crítico de f.*

Demostración. Como a es máximo local, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B(a,\delta)$

$$f(x) \leq f(a).$$

Sea $j \in \{1,\ldots,n\}$. Entonces, para cada $t > 0$,

$$\frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} \geq 0$$

Y, para cada $t > 0$,

$$\frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} \leq 0$$

Como $f \in C^1(X,\mathbb{R})$, existe la derivada parcial. Es decir,

$$\mathrm{D}_j f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = 0. \qquad \square$$

Definición 10. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f \in C^1(X,\mathbb{R})$. Si a es punto crítico de f pero no es máximo o mínimo local de f, se llama punto silla de f.*

Definición 11. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f \in C^2(X, \mathbb{R})$. Definimos la matriz hessiana de f en a como*

$$H_f(a) \coloneqq [D_{jk}f(a)]_{j,k=1}^n = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1^2 f(a) & \mathrm{D}_{12}f(a) & \cdots & \mathrm{D}_{1n}f(a) \\ \mathrm{D}_{21}f(a) & \mathrm{D}_2^2 f(a) & \cdots & \mathrm{D}_{2n}f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_{n1}f(a) & \mathrm{D}_{n2}f(a) & \cdots & \mathrm{D}_n^2 f(a) \end{bmatrix}.$$

Proposición 12. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in \mathbb{R}^n$ y $f \in C^2(X, \mathbb{R})$. Supongamos que a es un punto crítico de f en X. Entonces:*

a) Si $H_f(a) > 0$, f tiene un mínimo local en a.

b) Si $H_f(a) < 0$, f tiene un máximo local en a.

Ejercicios

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x, y) \coloneqq 4x_1y_1 - 7x_2.$$

   Determinar si f es una forma bilineal.

2. Sea V un espacio vectorial y $q\colon V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Demuestre que q es homogénea de grado 2, es decir,

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x), \quad \forall\, x \in V,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $a \in U$ y $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Supongamos que a es punto crítico de f y además,

$$\mathrm{D}_1^2 f(a)\mathrm{D}_2^2 f(a) - (\mathrm{D}_{12}f(a))^2 < 0.$$

   Demostrar que a es punto silla de f.

4. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) \coloneqq \sin(x_1^2 + y_2^2)$. ¿Cuáles son los puntos críticos de f?

5. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar si son máximos, mínimos o puntos silla:

   a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x_1^2 + x_2^2$.

   b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x_1^2 - x_2^2$.

c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2$

d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^2 - 2xy + 2y^2$.

6. Sean $D \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2\colon\ \|x\| \leq 1\}$ y $f\colon D \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) \coloneqq (x^2 + y^2)^4$. Hallar los máximos y mínimos de f.