Requisitos

Definición 1 (Conjunto acotado)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, X es un conjunto acotado si existe $M > 0$ tal que para cada $a \in X$,*

$$\|a\| \leq M.$$

Corolario 2. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_1. \tag{1}$$

Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Definición 3 (Sucesión en $\mathbb{R}^n$)**.** *Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una función $a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, el valor de a en k, se llama k–ésimo término de la sucesión.*

Identificamos cada término de la sucesión con un superíndice:

$$a(k) \coloneqq a^k.$$

Denotaremos a toda la sucesión por $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Note que cada sucesión en $\mathbb{R}^n$ determina n sucesiones en $\mathbb{R}$, pues para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$a^k = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k),$$

donde, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, a_j^k es la entrada j–ésima del k–ésimo término de la sucesión.

Ejemplo 4. *En $\mathbb{R}^2$, sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k \coloneqq \left(\frac{1}{k}, \frac{k^2}{k+1}\right)$. En este caso, $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_2^k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{k}{k^2+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Definición 5. *Sean $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b^k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *Se define la sucesión suma $((a+b)^k)_{k\in\mathbb{N}}$, donde para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$(a+b)^k \coloneqq a^k + b^k.$$

- *Se define la sucesión producto $((ab)^k)_{k\in\mathbb{N}}$, donde para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$(ab)^k \coloneqq a^k b^k.$$

- *Se define la sucesión producto por escalar $(\lambda a^k)_{k\in\mathbb{N}}$, donde para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$(\lambda a)^k \coloneqq \lambda a^k.$$

Sucesiones convergentes

Definición 6. *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $(x^k)_{k\in\mathbb{R}^n}$ es una sucesión convergente si existe $l \in \mathbb{R}^n$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$,*

$$\|x^n - l\| < \varepsilon.$$

En ese caso, decimos que l es el límite de la sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Proposición 7. *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$. Entonces, su límite es único.*

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 8. *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$. Entonces, la sucesión es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 9. *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente y su límite es a, si y solo si, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, la sucesión $(a_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbb{R}$ y su límite es a_j.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente y su límite es a. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $\|x^n - l\| < \varepsilon$. Sea $j \in \{1, \dots, n\}$. Por el corolario 2, tenemos

$$|x_j^n - l_j| \leq \|x^n - l\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la sucesión $(x_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a l_j en $\mathbb{R}$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, la sucesión $(a_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbb{R}$ y su límite es a_j. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existen $N_1, \dots, N_n \in \mathbb{N}$ tales que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, si $n > N_j$, se satisface

$$|x_n^k - l_j| < \frac{\varepsilon}{N_j}.$$

Haciendo $N \coloneqq \text{máx}\{N_1, \dots, N_n\}$, si $n > N$, por el corolario 2,

$$\|x^n - l\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j^k - l_j| < \varepsilon.$$ □

Proposición 10 (Propiedades de los límites)**.** *Sean* $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$*,* $(b^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sucesiones convergentes en* $\mathbb{R}^n$*,* $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión convergente en* $\mathbb{R}$*. Entonces,*

i) $\lim_{k\to\infty}(a+b)_k = \lim_{k\to\infty} a_k + \lim_{k\to\infty} b_k$.

ii) $\lim_{k\to\infty}(\lambda a)_k = \lim_{k\to\infty} \lambda_k \lim_{k\to\infty} a_k$.

iii) Sea $\gamma \in \mathbb{R}$*. Entonces,* $\lim_{k\to\infty}(\gamma a)_k = \gamma \lim_{k\to\infty} a_k$.

Demostración. Hacemos $l_1 := \lim_{k\to\infty} a_k$ y $l_2 := \lim_{k\to\infty} b_k$.

i) Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existen N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n > N_1$ y $j > N_2$, entonces

$$\|a^k - l_1\| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|b^j - l_2\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $N := \max\{N_1, N_2\}$. Entonces, si $m \geq N$,

$$\|a + b - l_1 - l_2\| \leq \|a - l_1\| + \|b - l_2\| < \varepsilon.$$

ii) Sea $\varepsilon > 0$. Si $\gamma = 0$, se tiene el resultado. Supongamos que $\gamma \neq 0$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$,

$$\|a^n - l_1\| \leq \frac{\varepsilon}{|\gamma|}.$$

Luego, para cada $n > N$,

$$\|\gamma a^n - \gamma l_1\| = |\gamma|\|a^n - l_1\| < \varepsilon.$$

iii) Ejercicio.

□

Proposición 11. *Sean* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $a \in \mathbb{R}^n$*. Entonces,* $a \in \overline{X}$ *si y solo si existe una sucesión de elementos de* X*,* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$*, tal que* $\lim_{k\to\infty} x^k = a$.

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $a \in \overline{X}$. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$X \bigcap B(a, \frac{1}{m}) \neq \varnothing.$$

Sean $\varepsilon > 0$ y $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k \in X \bigcap B(a, \frac{1}{m})$. Notemos que si $n \geq m$, entonces $B\left(a, \frac{1}{n}\right) \subseteq B\left(a, \frac{1}{m}\right)$.

Luego, por la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Por lo tanto, si $n > N$,

$$\|x^n - a\| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

$\Longleftarrow$) Supongamos que existe una sucesión de elementos de X que converge a a, es decir, una sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim_{k\to\infty} x^k = a$. Entonces, por la definición de límite, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$,

$$\|x^n - a\| < \varepsilon.$$

Esto es, $B(a,\varepsilon) \bigcap X \neq \varnothing$, pues todos los términos de la sucesión son elementos de X. Por lo tanto, $a \in \overline{X}$.

$\square$

Corolario 12. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, X es cerrado si y solo si existe una sucesión de elementos de X, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim_{k\to\infty} x^k = a$.*

1. Ejercicios

1. Demuestre que el conjunto de sucesiones en $\mathbb{R}^n$ con las operaciones de la definición 5 es un espacio vectorial.

2. Escriba la definición de sucesión convergente en términos de la distancia euclidiana y de bolas en $\mathbb{R}^n$.

3. Determine si las siguientes son sucesiones convergentes. De ser así, proponga el límite y demuestre que la sucesión converge a este punto.

   - Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión en $\mathbb{R}^2$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k := \left(\frac{1}{k}, \frac{k}{k+1}\right)$.
   - Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión en $\mathbb{R}^2$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k := \left(\frac{k}{2k+1}, \frac{2k^2}{3k^2+1}\right)$.
   - Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión en $\mathbb{R}^3$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k := \left(\frac{1-k}{2k}, \frac{k}{k^2+1}, \frac{2-k^2}{3+k^2}\right)$.

4. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$ y sea $p \in \mathbb{N}$. Definimos la sucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de modo que para cada $k \in \mathbb{N}$, $y^k := x^{p+k}$. Entonces, $\lim_{k\to\infty} y^k = \lim_{k\to\infty} x^k$.

5. Demuestre la proposición 7.

6. Demuestre la proposición 8.

7. Demuestre el corolario 12.

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $a < b$. Demuestre que $[a, b]$ es cerrado utilizando el corolario 12.