Ecuaciones diferenciales ordinarias
FES Acatlán
Actuaria

Enrique Abdeel Muñoz de la Colina

28 de octubre de 2024

Índice

1. Ecuaciones de orden superior **3**

1.1. Problemas de valores iniciales 3

1.2. Ecuaciones lineales homogéneas 5

1.3. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes 7

1.4. Ecuaciónes de Cauchy–Euler 8

1.5. Reducción de orden 10

2. Ecuaciones lineales no homogéneas **12**

2.1. Método de coeficientes indeterminados 12

2.2. Variación de parámetros 13

1. Ecuaciones de orden superior

1.1. Problemas de valores iniciales

Teorema 1.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio y sean $a \in \mathbb{R}$, $y_0, y_0', \ldots, y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$ tales que $(a, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$. Consideramos la ecuación*

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

Supongamos que f satisface las siguientes condiciones:

a) f es continua respecto a todos sus argumentos en D,

b) todas las derivadas parciales de f, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, son continuas respecto a los argumentos y, $y', \ldots, y^{(n-1)}$, en D .

Entonces, existe una única solución a la ecuación diferencial que satisface

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}.$$

Sean $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ y

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

Si φ es una solución a la ecuación que depende de las constantes $C_1, \ldots, C_n$, entonces φ se llama solución general de la ecuación diferencial.

Si $C_1, \ldots, C_n$ tienen valores fijos, entonces φ se llama soluciçon particular de la ecuación diferencial.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Recordemos la forma general de una ecuación diferencial lineal de orden n:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^{(k)}y}{\mathrm{d}x^k} = g(x), \tag{1}$$

donde para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $a_k(x)$ y g son funciones contínuas y además $a_n(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo donde se busca la solución de la ecuación.

Para estas ecuaciones, un problema de valores iniciales de orden n consiste en resolver la ecuación (1) sujeta a las restricciones

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Además, el teorema 1.1 tiene una versión especial para estas ecuaciones:

Teorema 1.2. *Sean $n \in \mathbb{N}$, y $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en un intervalo I, y supongamos que $a_n(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. Entonces para $x = x_0$ existe una única solución al problema de valores iniciales en I.*

Ejemplo 1.3. *Consideremos el problema $y'' = 0$, sujeto a $y(0) = 1$ y $y'(1) = 1$.*

La solución general para la ecuación es $y = c_1 x + c_2$. Para hallar la solución al problema de valores iniciales utilizamos las condiciones iniciales y reslvemos un sistema de ecuaciones para c_1 y c_2. De $y(0) = 1$, tenemos:

$$1 = y(0) = c_1(0) + c_2 = c_2.$$

De $y'(1) = 1$, tenemos

$$1 = y'(1) = c_1.$$

Por lo tanto, la solución particular al problema de valores iniciales es

$$y = x + 1.$$

Ejemplo 1.4. *Considremos el probelma $y'' + (\tan x)y = \mathrm{e}^x$, sujeto a las condiciones $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$. Hallar un intervalo centrado en 0, donde el problema tenga solución única.*

Demostración. La función $\tan x$ es continua en los intervalos $\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$. Luego, el intervalo donde el problema tiene solución única es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. □

Un problema que consiste en resolver una ecuación diferencial de orden mayor o igual que 2, donde los valores iniciales se dan en diferentes puntos, se llama problema de valores en la frontera. Cuando $n = 2$, el problema tiene la forma

$$a_2(x)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0(x).$$

sujeto a $y(a) = y_0$ y $y(b) = y_1$.

En ocasiones, las condiciones iniciales pueden estar dadas como

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1,$$
$$\alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) = \gamma_2.$$

Ejemplo 1.5. *La ecuación $y'' + 16y = 0$ tiene como solución general $y = c_1\cos(4t) + c_2\sin(4t)$. Determinar las soluciones particulares de los problemas*

a) $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

b) $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$.

c) $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Ejemplo 1.6. *Considere el problema $xy'' - y' = 0$, sujeto a $y(0) = 1$, $y'(1) = 6$. Halle el intervalo donde la ecuación tiene solución única y la solución particular.*

1.2. Ecuaciones lineales homogéneas

Recordemos que la ecuación lineal homogénea es de la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{\mathrm{d}^{(k)} y}{\mathrm{d}x^k} = 0.$$

Haciendo D al operador de diferenciación, podemos asocual a la ecuación un operador de diferenciación:

$$L \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k(x) D^k.$$

En este contexto, las soluciones de la ecuación diferencial son "ceros" del operador L.

Teorema 1.7 (Principio de superposición)**.** *Sean $a_n(x), \ldots, a_0(x)$ funciones continuas y consideramos la ecuación*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{\mathrm{d}^{(k)} y}{\mathrm{d}x^k} = 0.$$

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $y_1, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación. Entonces, cualquier combinación lineal de estas soluciones también es solución de la ecuación.

Demostración. Sean $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ y L el operador diferencial asociado a la ecuación. Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, y_j es solución de la ecuación, es decir, $Ly_j = 0$. Además, como el operador L es lineal, tenemos

$$L\left(\sum_{j=1}^{k} c_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} L(c_j y_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j L(y_j) = 0.$$

Por lo tanto, $\sum_{j=1}^{k} c_j y_j$ es solución de la ecuación. □

De este resultado se desprende facilmente que si tenemos una solución, cualquier múltiplo de ella también será solución de la ecuación.

Definición 1.8. *Sean $f_1, \ldots, f_n$ funciones continuas. Decimos que la familia $(f_j)_{j=1}^n$ es linealmente dependiente si existen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ no todas cero, tales que*

$$c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n = 0.$$

En caso contrario, diremos que la familia es linealmente independiente. Es decir, para cada $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$,

$$c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n = 0 \implies c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

Supongamos que abordamos el problema

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{\mathrm{d}^{(k)} y}{\mathrm{d}x^k} = 0,$$

sujeto a $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \ldots y^{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Supongamos además que tenemos n soluciones de la ecuación, $y_1, y_2, \ldots, y_n$. La solución general de la ecuación tiene la forma

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = 0,$$

donde $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$. Sustituyendo y en los valores iniciales tenemos

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) &= y_0 \\ c_1 y'_1(x_0) + \cdots + c_n y'_n(x_0) &= y'_0 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y y_n^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales. Si tiene solución, encontramos los valores de $c_1, \ldots, c_n$. El sistema tendrá solución si

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) & \cdots & y'_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Este determinante se llama *wronskiano* de $y_1, \ldots, y_n$. Lo denotamos como $W(y_1, \ldots, y_n)$.

Si un conjunto de soluciones satisface que $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$, para toda x en la región donde se busca resolver el problema, estas soluciones son linealmente independientes. En este caso, decimos que es un *conjunto fundamental de soluciones*.

Teorema 1.9. *Sean $y_1, \dots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{\mathrm{d}^{(k)} y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Entonces, la solución general de la ecuación es $y = c_1 y_1 + \cdots c_n y_n$.

En términos de operadores, el espacio nulo del operador diferencial asociado a la ecuación es un espacio vectorial. La base de este espacio es un conjunto linealmente independiente de soluciones de la ecuación. Por lo tanto, cualquier solución de la ecuación es una combinación lineal del conjunto funamental de soluciones.

Ejemplo 1.10. *Consideramos la ecuación $y'' - 9y = 0$. Las funciones $y_1 = \mathrm{e}^{3x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{-3x}$ son un conjunto fundamental de soluciones:*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{-3x} \\ 3\,\mathrm{e}^{3x} & -3\,\mathrm{e}^{-3x} \end{vmatrix} = -3\,\mathrm{e}^{3x-3x} - 3\,\mathrm{e}^{3x-3x} = -9 \neq 0.$$

Por lo tanto, la solución general de esta ecuación es $y = c_1\,\mathrm{e}^{3x} + c_2\,\mathrm{e}^{-3x}$.

1.3. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Sean $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Consideramos la ecuación

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Proponemos la solución de esta ecuación como $y = \mathrm{e}^{mx}$. Sustituyendo en la ecuación

$$a_2 m^2\,\mathrm{e}^{mx} + a_1 m\,\mathrm{e}^{mx} + a_0\,\mathrm{e}^{mx} = 0.$$

Para toda $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{mx} \neq 0$. Por lo tanto, tenemos la ecuación polinomial

$$a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0. \tag{2}$$

Si el polinomio (2) tiene raíces iguales, es decir, $m_1 = m_2$, entonces $m_1 = -\frac{a_1}{2a_2}$. Luego, una solución es $y_1 = \mathrm{e}^{m_1 x}$. Para hallar la otra solución, proponemos $y = u(x) y_1$. Sustituyendo en la ecuación y reorganizando términos,

$$\begin{aligned} a(u'' y_1 + 2u' y' + u y_1'') + a_1(u' y + u y_1') + a_0 u y &= 0 \\ u(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y) + a_2 u'' y_1 + 2a_2 u' y_1' + a_1 u' y_1 &= 0 \\ a_2 u'' y_1 + 2a_2 u' y_1' + a_1 u' y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo de manera explícita $y_1 = \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x}$, tenemos

$$\begin{aligned} a_2 u'' \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x} - 2\frac{a_1}{2a_2} a_2 u' \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x} + a_1 u' \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x} &= 0 \\ a_2 u'' &= 0 \end{aligned}$$

Integrando dos veces, $u = c_1 x + c_2$. Por lo tanto, $y = c_1 x \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x} + c_2 \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x}$. Las funciones $x \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x}$ y $\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x}$ son un conjunto fundamental de soluciones. Por lo tanto, la solución general de la ecuación es $y = c_1 x \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x} + c_2 \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x}$.

Si el polinomio (2) tiene raíces distintas m_1 y m_2, tenemos los siguientes casos:

$m_1, m_2 \in \mathbb{R}$. En este caso, las soluciones son $y_1 = \mathrm{e}^{m_1 x}$ y $y_2 = \mathrm{e}^{m_2 x}$. Además, estas funciones son un conjunto fundamental de soluciones.

$m_1, m_2 \in \mathbb{C}$. En este caso, $m_1 = a + \mathrm{i}\, b$ y $m_2 = \overline{m_1} = a - \mathrm{i}\, b$. Entonces, utilizando el hecho de que para cada $r \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, r} = \cos(r) + \mathrm{i} \sin(r)$; las soluciones son

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathrm{e}^{ax}(\cos(b) + \mathrm{i} \sin(b)) \\ y_2 &= \mathrm{e}^{ax}(\cos(b) - \mathrm{i} \sin(b)) \end{aligned}$$

Sin embargo, $u(x) = \mathrm{e}^{ax} \cos(b)$ y $v(x) = \mathrm{e}^{ax} \sin(b)$ son soluciones de valores reales de la ecuación y son linealmente independientes. Por lo tanto, estas funciones forman el conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo 1.11. *Encontrar la solución general de la ecuación*

$$2y'' - y' - y = 0.$$

Demostración. El polinomio asociado a la ecuación es

$$2r^2 - r - 1 = 0.$$

Las raíces de este polinomio son $m_1 = \frac{3}{2}$ y $m_2 = -1$. Luego, las soluciones de la ecuación diferencial son $y_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Como son soluciones linealmente independientes, la solución general es $y = C_1 \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + C_2 \mathrm{e}^{-x}$. □

1.4. Ecuaciónes de Cauchy–Euler

Una ecuación de Cauchy–Euler es de la forma

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

a_2, a_1, a_0 son constantes. Proponemos la solución de estas ecuaciones como $y = x^m$. Hallaremos valor de m al sustituir en la ecuación. Calculando las derivadas, tenemos

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} a_2x^2(m(m-1)x^{m-2}) + a_1xmx^{m-1} + a_0x^m &= 0 \\ x^m(a_2m(m-1) + a_1m + a_0) &= 0 \\ a_2m^2 + (a_1 - a_2)m + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el último polinomio, encontramos el valor de m. Sean r_1, r_2 las raíces del polinomio.

Si el polinomio tiene raíces iguales, entonces $r_1 = \frac{a_2-a_1}{2a_2}$. Luego, una solución es $y_1 = x^{r_1}$. Para hallar la otra solución proponemos $y = u(x)y_1(x)$. Sus derivadas son

$$y' = x^{m-1}(xu' + um), \qquad y'' = x^{m-1}(u''m^2 + 2u'mx + um(m-1)).$$

Sustituyendo en la ecuación, obtenemos

$$a_2u''x^2 + xu'(2a_2m + a_1) = 0.$$

Recordando que $m = \frac{a_2-a_1}{2a_2}$,

$$a_2u''x^2 + a_2xu' = 0.$$

Haciendo $v = u'$, tenemos

$$\frac{v'}{v} = -\frac{1}{x}.$$

Integrando,

$$\ln(v) = \ln\frac{1}{x}.$$

Es decir, $v = \frac{1}{x}$. Por lo tanto $u = \ln x$. Sustituyendo en y, la solución es

$$y = x^{r_2}\ln x.$$

Entonces, tenemos los siguientes casos:

$r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ En este caso, $r_1 = a + \mathrm{i}\,b$ y $r_2 = \overline{r_1} = a - \mathrm{i}\,b$. Haciendo $x^{\mathrm{i}\,b} = (\mathrm{e}^{\ln(x)})^{\mathrm{i}\,b}$, las soluciones son

$$y_1 = x^a(\cos(b\ln x) + \mathrm{i}\sin(b\ln x)),$$
$$y_2 = x^a(\cos(b\ln x) - \mathrm{i}\sin(b\ln x)).$$

Sin embargo, $u(x) = x^a\cos(b\ln x)$ y $v(x) = x^a\sin(b\ln x)$ son soluciones de valores reales de la ecuación y son funciones de valores reales. Por lo tanto, estas funciones conforman el conjunto fundamental de soluciones.

$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ Si $r_1 \neq r_2$, entonces las soluciones son $y_1 = C_1 x^{r_1}$ y $y_2(x) = C_2 x^{r_2}$. Si $r_1 = r_2$, hemos visto que las soluciones son $y_1(x) = C_1 x^{r_1}$ y $y_2(x) = C_2 x^{r_1} \ln x$.

1.5. Reducción de orden

Supongamos que tenemos una solución y_1, para una ecuación de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Para hallar una segunda solución, proponemos $y = v(x)y_1(x)$. Calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned} y' &= v'y_1 + vy_1'. \\ y'' &= v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + p(x)(v'y_1 + vy_1') + vy = 0. \\ v(y_1'' + p(x)y_1' + y) + v''y_1 + 2v'y_1' + p(x)v'y_1 = 0. \end{aligned}$$

El primer sumando en la última ecuación es 0, pues y_1 es solución de la ecuación original. Entonces, nos queda la ecuación

$$v''y_1 + v'(2y_1' + p(x)y_1) = 0.$$

Haciendo $u = v'$, podemos reescribir como una ecuación de variables separables:

$$u'y_1 + u(2y_1' + p(x)y_1) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación y sustituyendo en $y = vy_1$ encontramos la segunda solución a la ecuación original.

Ejemplo 1.12. *Sabemos que $y_1(x) = \frac{1}{x}$ es una solución de la ecuación diferencial*

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0.$$

Encontrar otra solución de la ecuación diferencial.

Demostración. Proponemos la otra solución como $y = v(x)y_1(x) = \frac{v(x)}{x}$. Derivando, tenemos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{v'(x)}{x} - \frac{v(x)}{x^2}. \\ y'' &= \frac{v''(x)}{x} - 2\frac{v'(x)}{x^2} + 2\frac{v(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación,

$$
\begin{aligned}
2x^2\left(\frac{v''(x)}{x} - 2\frac{v'(x)}{x^2} + 2\frac{v(x)}{x^3}\right) + 3x\left(\frac{v'(x)}{x} - \frac{v(x)}{x^2}\right) + \frac{v(x)}{x} &= 0. \\
2xv''(x) - v'(x) &= 0.
\end{aligned}
$$

Haciendo $u = v'$, tenemos una ecuación de variables separables. Resolvemos esa ecuación

$$
\begin{aligned}
2xw' &= w \\
\frac{\mathrm{d}w}{w} &= \frac{\mathrm{d}x}{2x} \\
\ln(w) &= \frac{1}{2}\ln(x) + C \\
\ln(w) &= \ln(x^{\frac{1}{2}}) + C.
\end{aligned}
$$

Aplicando la exponencial de ambos lados, tenemos $w = v' = Cx^{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, $v = C\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$. Sustituyendo en y,

$$
y = \frac{v(x)}{x} = Cx^{\frac{1}{2}}.
$$

□

2. Ecuaciones lineales no homogéneas

Ahora estudiaremos métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Es decir, ecuaciones que se escriben de la forma

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Supongamos que tenemos dos soluciones de la ecuación, digamos $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$. Considerando el operador diferencial L, asociado a la ecuación, tenemos que

$$\begin{aligned} LY_1 &= g(x), \\ LY_2 &= g(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $L(Y_1 - Y_2) = LY_1 - LY_2 = g(x) - g(x) = 0$. Es decir, $Y_1 - Y_2$ es solución de la ecuación homogénea. Luego, $Y_1 = C_1y_1 + C_2y_2 + Y_2$. Entonces, la solución de la ecuación no homogénea será la solución general de la ecuación homogénea agregando una función Y_2 tal que $LY_2 = g(x)$.

2.1. Método de coeficientes indeterminados

Supongamos que tenemos una ecuación de la forma

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x).$$

Si g es una función polinomial, exponencial o trigonométrica, proponemos una solución de la ecuación no homogénea de la siguiente forma:

- Si $g(x) = A_0 + A_1x + \cdots A_nx^n$, proponemos la solución como un polinomio del mismo grado $Y(x) \coloneqq B_0 + B_1x + \cdots + B_nx^n$.
- Si $g(x) = A\,\mathrm{e}^{bx}$, proponemos $Y(x) \coloneqq B_1e^{bx}$.
- Si $g(x) = A\sin(ax)$ o $g(x) = A\cos(bx)$, proponemos $Y(x) \coloneqq B_1\cos(bx) + B_2\sin(bx)$.

Los coeficientes de las soluciones que se proponen son incógnitas que debemos resolver al sustituir en la ecuación original.

Ejemplo 2.1. *Encontrar la solución de*

$$y'' - 3y' - 4y = 3\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Demostración. Primero hallamos la solución de la ecuación homogénea $y'' - 3y' - 4y = 0$. El polinomio característico de esta ecuación es

$$r^2 - 3r - 4 = 0.$$

Sus raíces son $r_1 = 4$, $r_2 = -1$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 \mathrm{e}^{-x}$. Para hallar la solución de la ecuación no homogénea proponemos $Y(x) = A \mathrm{e}^{2x}$. Derivando y sustituyendo en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} (4A - 6A - 4A)\, \mathrm{e}^{2x} &= 3\, \mathrm{e}^{2x} \\ -6A &= 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A = -\frac{1}{2}$. La solución de la ecuación no homogénea es

$$y = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2x}. \qquad \square$$

Ejemplo 2.2. *Encontrar la solución de*

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x).$$

Demostración. Del ejemplo anterior tenemos que la solución de la ecuación homogénea es $y = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 \mathrm{e}^{-x}$. Para la ecuación no homogénea proponemos $Y(X) = A_1 \cos(x) + A_2 \sin(x)$. Derivando y sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$(-A + 3B - 4A)\sin(x) + (-B - 3A - 4B)\cos(x) = 2\sin(x).$$

Por lo tanto, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} -5A + 3B &= 2 \\ -3A - 5B &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, $A = -\frac{5}{17}$ y $B = \frac{3}{17}$. Por lo tanto, la solución de la ecuación no homogénea es

$$y = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} - \frac{5}{17}\cos(x) + \frac{3}{17}\sin(x). \qquad \square$$

2.2. Variación de parámetros

Consideramos una ecuación diferencial no homogénea de orden 2.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(y) = g(x).$$

Escribimos la ecuación en la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x) = f(x). \tag{3}$$

Supongamos que tenemos dos soluciones linealmente idependientes de la ecuación homogénea, digamos y_1 y y_2. Para la ecuación no homogénea proponemos la solución $y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, donde u_1 y u_2 son funciones desconocidas. Derivando y tenemos

$$\begin{aligned} y' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y'' &= u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + 2u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

Como y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea, al sustituir y, y' y y'' en 3, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y_1u_1' + y_2u_2'] + P(x)(y_1u_1'\text{‘}y_2u_2') + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x).$$

Para simplificar los cálculos hacemos $y_1u_1'\text{‘}y_2u_2' = 0$. Entonces,

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x).$$

Así, para cada x tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1u_1'\text{‘}y_2u_2' &= 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' &= f(x) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema por la regla de Cramer, para cada x,

$$u_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \quad u_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)}$$

donde

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Las funciones u_1 y u_2 se encuentran integrando u_1' y u_2'. La solución general de la ecuación es

$$y_g(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2.$$

Ejemplo 2.3. *Encontrar la solución de*

$$y'' + 9y = \frac{1}{4}\csc 3x.$$

Demostración. Primero resolvemos la ecuación homogénea

$$y'' + 9y = 0.$$

Las raíces del polinomio característico $r^2 + 9 = 0$son $r_1 = 3\,\mathrm{i}$ y $r_2 = -3\,\mathrm{i}$. entonces, la solución general de la ecuación homogénea es $y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$. Para hallar la solución de la ecuación no homogénea proponemos $y_h = u_1(x)\cos(3x) + u_2(x)\sin(3x)$, donde

$$u_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \quad u_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)};$$

y

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Sustituyendo los valores tenemos: □

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = 3,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin(3x) \\ \frac{1}{4}\csc(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{4},$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos(3x) & 0 \\ -3\sin(3x) & \frac{1}{4}\csc(3x) \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}(3x).$$

Luego,

$$u_1'(x) = -\frac{1}{12}, \quad u_2'(x) = \frac{1}{12}\operatorname{ctg}(3x).$$

Integrando $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$,

$$u_1(x) = -\frac{1}{12}x, \quad u_2(x) = \frac{1}{12}\ln(\sin(3x)).$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) - \frac{1}{12}x\cos(3x) + \frac{1}{12}\sin(3x)\ln(\sin(3x)).$$