Ecuaciones diferenciales ordinarias
FES Acatlán
Actuaria

Enrique Abdeel Muñoz de la Colina

15 de noviembre de 2024

1. Transformada de Laplace

1.1. Definiciones y propiedades básicas

La transformada de Laplace resulta útil para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. La uso de esta transformación es conveniente. Buscamos convertir la ecuación diferencial en una ecuación algebráica que en la mayoría de los casos es mucho más simple que la ecuación diferencial.

Veremos algunas definiciones antes de llegar a la transformada de Laplace.

Definición 1.1. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Decimos que f es continua a trozos si f es continua a trozos, si para cada $x \in [a,b]$, salvo una cantidad finita de puntos, f es continua en x.*

Definición 1.2. *Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama de tipo exponencial o de orden exponencial si existen constantes K y a tales que para toda $t \in \mathbb{R}$,*

$$|f(t)| \leq K\,\mathrm{e}^{at}\,.$$

Sea $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones de orden exponencial y continuas a trozos en $\mathbb{R}$.

Definición 1.3. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$ continua e integrable y sea $D \subseteq X$. Definimos $P\colon \mathcal{F} \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ mediante*

$$P[f(t)] \coloneqq \int_D K(s,t) f(t)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

La función K se llama kernel del operador P.

Definición 1.4. *Definimos la transformada de Laplace como el operador $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ como*

$$\mathcal{L}[f(t)] \coloneqq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Note que $\mathcal{L}[f(t)]$ es una función de s.

Proposición 1.5. *Sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Entonces, $\mathcal{L}[f(t)]$ está bien definido.*

Demostración. Como $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, existen K y a tales que para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq K\,\mathrm{e}^{at}\,.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f(t)]| = \left|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{-st} f(t)\right|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^{+\infty} K\,\mathrm{e}^{-t(a-s)}\,\mathrm{d}t = \frac{K}{s-a}. \end{aligned}$$

Es decir, la integral existe. Por ello, $\mathcal{L}[f(t)]$ está bien definido. □

Proposición 1.6. *El operador* $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *es lineal. Es decir, para cada* $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *y para todo* $a \in \mathbb{R}$,

$$[af(t) + g(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)].$$

Demostración. Mediante cálculo directo, utilizando las propiedades de la integral se obtiene el resultado. □

Proposición 1.7. *Sea* $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *y supongamos que* $f' \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. *Entonces,*

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

Demostración. El resultado se obtiene directamente, calculando la transformada de Laplace de f', integrando por partes. □

Definición 1.8. *Sea* $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. *Para cada* $s \in \mathbb{R}$, *hacemos* $F(s) \coloneqq \mathcal{L}[f(t)]$. *Entonces, definimos la transformada inversa de Laplace de* F *como*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t).$$

Ejemplo 1.9. *Calcular la transformada de Laplace de una función constante.*

Demostración. Como la transformada de Laplace es lineal, basta calcular la transformada de la función constante 1. Es decir,

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-st}\right)\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-st} - 1\right) = \frac{1}{s}.$$

□

Ejemplo 1.10. *Calcular* $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}]$.

Demostración. Calculamos directamente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}] &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{-st}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(s-a)}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{a-s}\left(e^{-t(s-a)}\right)\Big|_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{s-a}\left(\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(s-a)} - 1\right) = \frac{1}{s-a}.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.11. *Sea* $c \in \mathbb{R}$. *Calcular la transformada de Laplace de* $\sin(ct)$, $\cos(ct)$.

Demostración. Sabemos que $\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\cos(ct) = \cos(ct)$. Utilizando la proposición 1.7 dos veces, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(ct)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\cos(ct)\right] = \frac{s}{c^2}\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(ct)\right] - \sin(0) \\ &= \frac{s}{c^2}\left(s\mathcal{L}[\cos(ct)] - \cos(0)\right) = \frac{s^2}{c^2}\mathcal{L}[\cos(ct)] - \frac{s}{c^2}.\end{aligned}$$

Despejando $\mathcal{L}[\cos(ct)]$, tenemos

$$\mathcal{L}[\cos(ct)] = \frac{s}{s^2 - c^2}.$$

Razonando del mismo modo para $\sin(ct)$, tenemos

$$\mathcal{L}[\sin(ct)] = \frac{1}{s^2 - c^2}. \qquad \square$$

Ejemplo 1.12. *Sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y supongamos que existen n de sus derivadas y que para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, $f^{(k)} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Calcular $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]$.*

Ejemplo 1.13. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcular $\mathcal{L}[t^n]$.*

Demostración. Calculamos directamente

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^{+\infty} t^n \, \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t.$$

Haciendo $u = st$, tenemos

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{s^{n+1}} \square$$

Proposición 1.14. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin(bt)] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2},$$
$$\mathcal{L}[e^{at} \cos(bt)] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}.$$

Proposición 1.15. *$\mathcal{L}^{-1}$ es lineal.*

Proposición 1.16. *Sea $f \in \mathcal{P}([0, +\infty))$. Para cada $s \in \mathbb{R}$, hacemos $F(s) \coloneqq \mathcal{L}[f]$. Entonces, $\mathcal{L}[f]$ es derivable y*

$$F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)].$$

Definición 1.17. *Sea $c > 0$. Definimos $u_c \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ mediante*

$$u_c(t) \coloneqq \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c. \end{cases}$$

Proposición 1.18. *Para cada $c > 0$,*

$$\mathcal{L}[u_c] = \frac{e^{-cs}}{s}.$$

Proposición 1.19. *Sea $f \in \mathcal{P}([0, +\infty))$. Entonces,*

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)].$$

Definición 1.20. *Sean $f, g \in \mathcal{P}([0, +\infty))$. Definimos la convolución de f con g mediante*

$$(f * g)(x) := \int_0^x f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Teorema 1.21. *Sean $f, g \in \mathcal{P}([0, +\infty))$. Entonces,*

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g].$$

1.2. Aplicación a las ecuaciones diferenciales

Ejemplo 1.22. *Utilizando la transformada de Laplace, resolver la ecuación*

$$y'' + y = \sin(\omega t).$$

Demostración. Aplicamos la transformada de Laplace a toda la ecuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + y] &= \mathcal{L}[\sin(\omega t)] \\ s^2 Y - sy(0) - y'(0) + Y &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Asociando términos, tenemos

$$Y = \frac{1}{s^2+1} + \frac{\omega}{(s^2+1)(s^2+\omega^2)}.$$

Escribimos el segundo sumando utilizando fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{(s^2+1)(s^2+\omega^2)} &= \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+\omega^2} \\ &= \frac{(As+B)(s^2+\omega^2) + (Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+\omega^2)}. \end{aligned}$$

Desarrollando los productos, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B + D &= 0 \\ A\omega^2 + C &= 1 \\ B\omega^2 + D &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega^2 - 1}, & B &= 0, \\ C &= -\frac{1}{\omega^2 - 1} & D &= 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\omega}{(s^2+1)(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^2-1}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{\omega^2-1}\frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Como $\mathcal{L}[\sin(t)] = \frac{1}{s^2+1}$, $\mathcal{L}[\cos(t)] = \frac{1}{s^2+1}$ y $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$, tenemos que la solución de la ecuación es

$$y = \mathcal{L}^{-1}[Y] = \sin(t) + \frac{1}{\omega^2-1}(\cos(t) - \sin(\omega t)). \qquad \square$$

Ejemplo 1.23. *Utilizando la transformada de Laplace, resolver la ecuación*

$$2y'' + y' + 2y = u_5(x), \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Demostración. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación, tenemos

$$\mathcal{L}[y](2s^2 + s + 1) = \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-5s}.$$

Despejando $\mathcal{L}[y]$,

$$\mathcal{L}[y] = \mathrm{e}^{-5s}\,\frac{1}{s(2s^2+s+1)}.$$

Separando el segundo factor por fracciones parciales,

$$\frac{1}{s(2s^2+s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{2s+1}{2s^2+s+1}.$$

En el segundo sumando, completamos el cuadrado

$$\frac{2s+1}{2s^2+s+1} = \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+\frac{s}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}.$$

Así,

$$\mathcal{L}[y] = \mathrm{e}^{-5s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{16}}\right)$$

Por la proposición 1.14,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} + \frac{\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}}\right] \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + \frac{1}{\sqrt{7}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)
\end{aligned}$$

Luego, por la proposición 1.19

$$y = u_5(t)\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(t-5)}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}(t-5)\right) + \frac{1}{\sqrt{7}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(t-5)}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}(t-5)\right)\right). \qquad \square$$