Ecuaciones diferenciales ordinarias
FES Acatlán
Actuaria

Enrique Abdeel Muñoz de la Colina

15 de noviembre de 2024

1. Producto interno

Definición 1.1. *Sea V un espacio vectorial complejo. Una función $p\colon V \times V \to \mathbb{R}$ se llama producto interno en V si satisface las siguientes propiedades:*

a) p es lineal respecto al primer argumento:

$$p(\lambda x + y, z) = \lambda p(x, z) + p(y, z), \qquad \forall\, x, y, z \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

b) p es simétrica conjugada:

$$p(x, y) = \overline{p(y, x)}, \qquad \forall x, y \in V.$$

c) p es definida positiva:

$$p(x, x) > 0, \qquad \forall x \in V \backslash \{0\}.$$

Con estas propiedades es posible concluir propiedades adicionales de los productos internos.

Proposición 1.2. *Sea V un espacio vectorial real y $p\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Entonces, p es lineal conjugada respecto al segundo argumento, es decir,*

$$p(x, \lambda y + z) = \overline{\lambda} p(x, y) + p(x, z), \qquad \forall\, x, y, z \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Un espacio vectorial puede tener varios productos internos. Cuando el producto interno está fijo, una notación habitual para él es $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Así, en lugar de escribir $p(x, y)$, escribimos $\langle x, y \rangle$.

Proposición 1.3 (Desigualdad de Cauchy–Schwarz)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Demostración. Si $x = 0$, se tiene la igualdad.

Si $x \neq 0$, hacemos $\lambda \coloneqq \frac{\langle x,y \rangle}{\langle x,x \rangle}$ y $z \coloneqq y - \lambda x$. Utilizando la linealidad del producto interno, observamos que $\langle x, z \rangle = 0$. Luego, $\langle z, z \rangle = \langle y, y \rangle - \frac{(\langle x,y \rangle)^2}{\langle a,a \rangle}$. Como el producto interno es definido positivo, se cumple la desigualdad deseada. $\square$

Ejemplo 1.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Hacemos $\mathcal{P}_n \coloneqq \{f(x) \in \mathbb{C}[x]\colon \ \deg(f) \leq n\}$. En $\mathcal{P}_n$ definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathcal{P}_n^2 \to \mathbb{C}$ mediante*

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_0^1 \overline{g(t)} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Entonces, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $\mathcal{P}_n$.

En adelante, consideraremos $\mathcal{H} \coloneqq \mathrm{L}_2([0, 2\pi))$ con la medida $\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\mu$, donde μ es la medida de Lebesgue usual. Definimos el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathcal{H}^2 \to \mathbb{C}$ mediante

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g}(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$$

También, utilizaremos el hecho de que para cada $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$.

Definición 1.5. *Para cada $k \in \mathbb{Z}$, hacemos*

$$\varphi_k(t) \coloneqq \mathrm{e}^{-kit}.$$

Una base de $\mathcal{H}$ es $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Veremos que es una base ortonormal.

Lema 1.6. *Para cada $m \in \mathbb{Z}$,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_m \,\mathrm{d}\mu = \delta_{m,0}.$$

Lema 1.7. *Para cada $p, q \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{aligned} \varphi_p\varphi_q &= \varphi_{p+q} \\ \overline{\varphi_p} &= \varphi_{-p}. \end{aligned}$$

Lema 1.8. *Para cada $p, q \in \mathbb{Z}$,*

$$\langle \varphi_p, \varphi_q \rangle = \delta_{p,q}.$$

Como $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal de $\mathcal{H}$, para cada $f \in \mathcal{H}$, podemos escribir

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\varphi_k,$$

donde para cada $k \in \mathbb{Z}$, $a_k = \langle f, \varphi_k \rangle$.

Ejemplo 1.9. *Calcular la serie de Fourier de $f(x) = x$.*

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$a_k = \langle f, \varphi_k \rangle.$$

Entonces, integrando por partes y usando el lema 1.6,

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{ik}(-1)^k = \frac{i}{k}(-1)^{k+1}.$$

Luego,

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{i}{k}(-1)^{k+1}\varphi_k.$$

Notamos que la serie se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi i}{k}(-1)^{k+1}\varphi_k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi i}{-k}(-1)^{-k+1}\varphi_{-k}.$$

Además, tomando el k-ésimo término de cada suma, tenemos

$$a_k\varphi_k = \overline{a_{-k}\varphi_{-k}}.$$

Luego, por las propiedades de los números complejos,

$$\begin{aligned} a_k\varphi_k + a_{-k}\varphi_{-k} &= a_k\varphi_k + \overline{a_k\varphi_k} \\ &= 2\mathrm{Re}(a_k\varphi_k) = 2\mathrm{Re}\left(\frac{i}{k}\,\mathrm{e}^{-ikt}\right) \\ &= 2\mathrm{Re}\left(\frac{i}{k}(\cos(kt) - i\sin(kt))\right) \\ &= 2\mathrm{Re}\left(\frac{2}{k}(\sin(kt) + i\cos(kt))\right) \\ &= \frac{2}{k}\sin(kt). \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir ambas series como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k}\sin(kt). \qquad \square$$