Ecuaciones diferenciales ordinarias
FES Acatlán
Actuaria

Enrique Abdeel Muñoz de la Colina

15 de noviembre de 2024

Índice

1. Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación que relaciona una variable independiente con una función de dicha variable y sus derivadas, es decir, una ecuación de la forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

El orden de una ecuación diferencial ordinaria es el de la derivada de orden mayor en la ecuación. Si Φ es una función que satisface la ecuación diferencial, se llama *solución de la ecuación diferencial*, es decir, Φ es una solución si satisface

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \Phi''(x), \ldots, \Phi^{(n)}(x)) = 0.$$

Ejemplo 1.1. *Sea k un número real. La ecuación*

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + k\varphi = 0,$$

es una ecuación diferencial ordinaria de orden 2 en la variable φ.

Una ecuación diferencial se llama lineal si es una expresión de la forma

$$\sum_{j=0}^{n} a_k(x) \frac{\mathrm{d}^{(k)}y}{\mathrm{d}x^k} = g(x),$$

donde, para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, a_k es una función. Si $g(x) = 0$, decimos que la ecuación está en su forma homogénea.

2. Ecuaciones de orden 1

2.1. Isoclinas

Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La ecuación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ se puede interpretar como la familia de lugares geométricos donde la solución a la ecuación tiene la misma inclinación. Por un lado, para cada $c \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = c$ es una curva de nivel asociada a c. Por otro lado, en esas curvas de nivel $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c$.

2.2. Ecuaciones de variables separables

Una ecuación de orden 1 en la que los coeficientes se descomponen en productos de funciones independientes de x y y se llama de variables separables. Estas ecuaciones son de la forma

$$a_1(x)b_1(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0(x)b_0(y) = 0. \tag{1}$$

Asumiendo que $a_1(x)b_0(y) \neq 0$, reescribimos la ecuación como

$$\frac{b_1(y)}{b_0(y)}\mathrm{d}\,y + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\mathrm{d}\,x = 0.$$

Así, la solución general de esta ecuación es

$$\int \frac{b_1(y)}{b_0(y)}\,\mathrm{d}y + \int \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,\mathrm{d}x = C.$$

Ejemplo 2.1. *Hallar la solución general a la ecuación*

$$(1+\mathrm{e}^x)y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x\,.$$

Haciendo $a_1(x) = 1+\mathrm{e}^x$, $b_1(y) = y$, $a_0(x) = -\mathrm{e}^x$ y $b_1(y) = 1$, logramos escribir la ecuación de la forma (1). Por lo tanto, es de variables separables. Obtenemos la solución general integrando:

$$\int \frac{b_1(y)}{b_0(y)}\,\mathrm{d}y + \int \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,\mathrm{d}x = \int y\,\mathrm{d}y - \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \frac{y^2}{2} - \ln(1+e^x).$$

Luego,

$$y = \sqrt{\ln(1+\mathrm{e}^x)+C}.$$

2.3. Ecuaciones homogéneas

Sea $k \in \mathbb{N}_0$. Una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama homogénea de grado k si para cada $t \in \mathbb{R}$ y para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(tx) = t^k f(x). \tag{2}$$

Ejemplo 2.2. *Las siguientes funciones son homogéneas:*

1. $f(x) = x^2$.
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
3. $f(x,y) = \ln(x) - \ln(y) + \frac{x+y}{x-y}$.

Una ecuación diferencial de orden 1 se llama homogénea si es de la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \tag{3}$$

donde, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función homogénea de grado 0.

De manera equivalente, la ecuación es homogénea si se escribe de la forma

$$P(x,y)\,\mathrm{d}y + Q(x,y)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{4}$$

donde $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

Las ecuaciones homogéneas pueden ser transformadas en ecuaciones de variables separables utilizando el cambio de variable $y = xv$: Si tenemos la ecuación en la forma (3), para cada $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $y \in \mathbb{R}$, por (2),

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{x}\right)^0 f(x,y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{x}{y}\right).$$

Haciendo $v \coloneqq \frac{x}{y}$ y $g(v) \coloneqq f(1,v)$, la ecuación (3) se escribe como

$$v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = g(v).$$

De esta última expresión se obtiene una ecuación de variables separables:

$$\frac{\mathrm{d}v}{g(v) - v} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Si una ecuación diferencial no es homogénea, en ocasiones se puede convertir en homogénea realizando el cambio de variable $y = z^\alpha$. En este caso, se deberá buscar el valor adecuado de α para que las funciones P y Q sean homogéneas del mismo grado.

Ejemplo 2.3. *Hallar la solución general de la ecuación*

$$(x^2y^2 - 1)\,\mathrm{d}y + 2xy^3\,\mathrm{d}x = 0.$$

La ecuación no es homogénea, pues $P(x,y) = x^2y^2 - 1$ no es una función homogénea. Hacemos el cambio de variable $y = z^\alpha$, $\mathrm{d}y = \alpha z^{\alpha-1}\,\mathrm{d}z$:

$$(\alpha x^2 z^{3\alpha-1} - \alpha z^{\alpha-1})\,\mathrm{d}z + 2xz^{3\alpha}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Para que sea una ecuación homogénea se debe satisfacer $\alpha - 1 = 3\alpha + 1$, es decir, $\alpha = -1$. Sustituyendo el valor de α en la ecuación, y multiplicando por z^4, obtenemos

$$(z^2 - x^2)\,\mathrm{d}z + 2xz\,\mathrm{d}x = 0.$$

Esta última expresión es una ecuación homogénea. Para hallar la solución, hacemos el cambio de variable $z = vx$, $\mathrm{d}z = v\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}v$.

$$x(v^2 - 1)\,\mathrm{d}v + v(v^2 + 1)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Separando las variables, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{v^2-1}{v^3+v}\,\mathrm{d}v.$$

Integrando,

$$\ln x + C = \ln(v) - \ln(v^2+1).$$

Por lo tanto, la solución implícita es

$$C = \frac{x(v^2+1)}{v}.$$

Sustituyendo $v = \frac{1}{xy}$,

$$C = \frac{1+x^2y^2}{y}.$$

2.4. Ecuaciones exactas y factor integrante

Sean $M, N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones y consideramos la ecuación

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Esta ecuación se llama exacta si las funciones satisfacen

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

En este caso, la solución es una función $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{d}\Psi(x,y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,\mathrm{d}y = M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Para hallar la solución $\Psi(x,y)$ debemos escoger M o N para integrar en la variable x o en la variable y, respectivamente y agregar una función de la otra variable. Supongamos que se ha escogido la función M, entonces

$$\Psi(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g(y).$$

Luego, derivamos respecto a y e igualamos a N. Para hallar g cancelamos términos semejantes e integramos.

Ejemplo 2.4. *Resolver la ecuación*

$$(y\cos x + 2x\,\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x + (\sin x + x^2\,\mathrm{e}^y - 1)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Primero, identificamos las finciones M Y N:

$$\begin{aligned} M(x,y) &= y\cos x + 2x\,\mathrm{e}^y, \\ N(x,y) &= \sin x + x^2\,\mathrm{e}^y - 1. \end{aligned}$$

Notamos que la ecuación es exacta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \cos x + 2x\,\mathrm{e}^y, \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \cos x + 2x\,\mathrm{e}^y. \end{aligned}$$

Ahora, integramos M respecto a x

$$\Psi(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int (y\cos x + 2x\,\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x = y\sin x + x^2\,\mathrm{e}^y + g(y).$$

Para hallar la función g, derivamos respecto a y e igualamos con N:

$$\sin x + x^2\,\mathrm{e}^y + g'(y) = \sin x + x^2\,\mathrm{e}^y - 1$$

Por lo tanto, $g'(y) = -1$. Integrando g y sustituyendo en Ψ, tenemos

$$\Psi(x,y) = y\sin x + x^2\,\mathrm{e}^y - y + C.$$

Puede ocurrir que una ecuación no exacta se transforme en una ecuación exacta utilizando un factor integrante. El factor integrante es una función tal que al multiplicar la ecuación por ella, la ecuación se hace exacta. Es decir, si $\mu(x,y)$ es el factor integrante, entonces la ecuación siguiente es exacta:

$$\mu(x,y)M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Por lo tanto, si $\widehat{M}(x,y) \coloneqq \mu(x,y)M(x,y)$ y $\widehat{N}(x,y) = \mu(x,y)N(x,y)$, se satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{M}}{\partial y} &= \frac{\partial \widehat{N}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial y}M + \frac{\partial M}{\partial y}\mu &= \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \frac{\partial N}{\partial x}\mu. \end{aligned}$$

Asociando términos semejantes,

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial x}N - \frac{\partial \mu}{\partial y}M. \tag{5}$$

Para hallar μ debemos resolver la ecuación anterior, lo cual no es tarea fácil. Sin embargo, podemos establecer restricciones sobre μ para facilitar un poco las cosas.

Supongamos que μ solo depende de x. Entonces, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$. Luego, podemos encontrar el factor itegrante reescribiendo 5:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}.$$

El lado izquierdo de la igualdad es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(\mu(x))$, por lo que,

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,\mathrm{d}x\right).$$

Si el factor integrante depende de x y y, el problema se aborda según sea el caso.

Ejemplo 2.5. *Encontrar el factor integrante, suponiendo que $\mu(x, y) = m(xy)$.*

Demostración. Suponemos que $\mu(x, y) = m(xy)$ es factori integrante de la ecuación

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Entonces, al multiplicar por $\mu(x, y)$ tendremos una ecuación exacta. Es decir, si $\widehat{M}(x, y) \coloneqq \mu(x, y)M(x, y)$ y $\widehat{N}(x, y) = \mu(x, y)N(x, y)$, se satisface

$$\frac{\partial \widehat{M}}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{N}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \frac{\partial M}{\partial y}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \frac{\partial N}{\partial x}\mu.$$

Calculamos las derivadas parciales de μ:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = m'(x, y)x, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x} = m'(x, y)y.$$

Por lo tanto,

$$m'(xy)x\,M + \frac{\partial M}{\partial y}\mu = m'(xy)y\,N + \frac{\partial N}{\partial x}\mu.$$

Asociando términos tenemos

$$m'(x, y)(xM - yN) = m\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\frac{m'(x, y)}{m(x, y)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN}.$$

Haciendo $f(\xi) = \frac{m'(\xi)}{m(\xi)}$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \ln(m(\xi)) = f(\xi).$$

Si $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, entonces

$$\mu(\xi) = \mathrm{e}^{F(\xi)} .$$

Por lo tanto, $\mu(x, y) = \mathrm{e}^{F(x,y)}$. □

Ejemplo 2.6. *Hallar el factor integrante de la ecuación*

$$x \,\mathrm{d}x + y \,\mathrm{d}y + x(x \,\mathrm{d}y - y \,\mathrm{d}x) = 0.$$

Suponga que el factor integrante es de la forma $\mu(x, y) = f(x^2 + y^2)$.

Demostración. Reescribimos la ecuación como

$$(x - xy) \,\mathrm{d}x + (y + x^2) \,\mathrm{d}y = 0.$$

Entonces, $M(x, y) = x - xy$ y $N(x, y) = y + x^2$. La ecuación no es exacta. Si μ es factor integrante, entonces la siguiente ecuación es exacta:

$$\mu(x, y)M(x, y) \,\mathrm{d}x + \mu(x, y)N(x, y) \,\mathrm{d}y = 0.$$

Hacemos $\widehat{M} \coloneqq \mu(x, y)M(x, y)$ y $\widehat{N} \coloneqq \mu(x, y)N(x, y)$. Entonces,

$$\frac{\partial \widehat{M}}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{N}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \frac{\partial M}{\partial y} \mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \frac{\partial N}{\partial x} \mu.$$

Calculamos las derivadas parciales de μ:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = f'(x^2 + y^2)2y, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x} = f'(x^2 + y^2)2x.$$

Por lo tanto,

$$2yf'(x^2 + y^2)\, M + \frac{\partial M}{\partial y} f(x^2 + y^2) = 2xf'(x^2 + y^2)\, N + \frac{\partial N}{\partial x} f(x^2 + y^2).$$

Asociando términos tenemos

$$f'(x^2+y^2)(2yM-2xN) = f(x^2+y^2)\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\frac{f'(x^2+y^2)}{f(x^2+y^2)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{2yM-2xN}.$$

Sustituyendo M y N,

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x^2+y^2)}{f(x^2+y^2)} &= \frac{-2x+x}{2y(x-xy)-2x(y+x^2)} \\
\frac{f'(x^2+y^2)}{f(x^2+y^2)} &= \frac{-x}{2yx-2xy^2-2xy-2x^3} \\
\frac{f'(x^2+y^2)}{f(x^2+y^2)} &= \frac{1}{2(x^2+y^2)}
\end{aligned}$$

Haciendo $\xi \coloneqq x^2+y^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} &= \frac{1}{2\xi} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\ln(f(\xi)) &= \frac{1}{2\xi} \\
\ln(f(\xi)) &= \frac{1}{2}\ln(\xi) \\
f(\xi) = \xi^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. □

2.5. Ecuación de Bernoulli

Sean $n \in \mathbb{R}$ y $P(x)$, $Q(x)$ funciones. Las ecuaciones de Bernoulli son ecuaciones de la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Esta ecuación se puede convertir en una ecuación lineal a través del cambio de variable $u = y^{1-n}$.

En ocasiones, para encontrar la solución de estas ecuaciones, resulta cómodo hacer el cambio de variable $y = u(x)v(x)$.

Ejemplo 2.7. *Resolver la ecuación*

$$xy' + y = x^2y^2.$$

Demostración. Proponemos la solución $y = u(x)v(x)$. Entonces, $y' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$. Sustituyendo en la ecuación, y organizando los términos:

$$\begin{aligned} x(uv' + u'v) + uv &= x^2u^2v^2 \\ u(xv' + v) + xu'v &= x^2u^2v^2 \end{aligned}$$

Resolvemos para $v(x)$, suponiendo que $xv' + v = 0$. Note que se tratra de una ecuación de variables separables.

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Entonces, $\ln v = \frac{1}{x}$. Por lo que $v = \frac{1}{x}$. Susituyendo en la ecuación original, tenemos

$$u' = u^2.$$

Esta ecuación también es de variables separables. Resolviendo, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \mathrm{d}x \implies u = \frac{1}{-x + C}.$$

Sustituyendo u y v en y, tenemos

$$y = -\frac{1}{x(x + C)}.$$ □

3. Ecuaciones de orden superior

3.1. Problemas de valores iniciales

Teorema 3.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio y sean $a \in \mathbb{R}$, $y_0, y_0', \ldots, y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$ tales que $(a, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$. Consideramos la ecuación*

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

Supongamos que f satisface las siguientes condiciones:

a) f es continua respecto a todos sus argumentos en D, *b) todas las derivadas parciales de f, $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, son continuas respecto a los argumentos y, $y', \ldots$, $y^{(n-1)}$, en D .*

Entonces, existe una única solución a la ecuación diferencial que satisface

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}.$$

Sean $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ y

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

Si φ es una solución a la ecuación que depende de las constantes $C_1, \ldots, C_n$, entonces φ se llama solución general de la ecuación diferencial.

Si $C_1, \ldots, C_n$ tienen valores fijos, entonces φ se llama soluciçon particular de la ecuación diferencial.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Recordemos la forma general de una ecuación diferencial lineal de orden n:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^{(k)}y}{\mathrm{d}x^k} = g(x), \tag{6}$$

donde para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $a_k(x)$ y g son funciones contínuas y además $a_n(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo donde se busca la solución de la ecuación.

Para estas ecuaciones, un problema de valores iniciales de orden n consiste en resolver la ecuación (6) sujeta a las restricciones

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Además, el teorema 3.1 tiene una versión especial para estas ecuaciones:

Teorema 3.2. *Sean $n \in \mathbb{N}$, y $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en un intervalo I, y supongamos que $a_n(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. Entonces para $x = x_0$ existe una única solución al problema de valores iniciales en I.*

Ejemplo 3.3. *Consideremos el problema $y'' = 0$, sujeto a $y(0) = 1$ y $y'(1) = 1$.*

La solución general para la ecuación es $y = c_1x + c_2$. Para hallar la solución al problema de valores iniciales utilizamos las condiciones iniciales y reslvemos un sistema de ecuaciones para c_1 y c_2. De $y(0) = 1$, tenemos:

$$1 = y(0) = c_1(0) + c_2 = c_2.$$

De $y'(1) = 1$, tenemos

$$1 = y'(1) = c_1.$$

Por lo tanto, la solución particular al problema de valores iniciales es

$$y = x + 1.$$

Ejemplo 3.4. *Considremos el probelma $y'' + (\tan x)y = \mathrm{e}^x$, sujeto a las condiciones $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$. Hallar un intervalo centrado en 0, donde el problema tenga solución única.*

Demostración. La función $\tan x$ es continua en los intervalos $\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$. Luego, el intervalo donde el problema tiene solución única es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. □

Un problema que consiste en resolver una ecuación diferencial de orden mayor o igual que 2, donde los valores iniciales se dan en diferentes puntos, se llama problema de valores en la frontera. Cuando $n = 2$, el problema tiene la forma

$$a_2(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0(x).$$

sujeto a $y(a) = y_0$ y $y(b) = y_1$.

En ocasiones, las condiciones iniciales pueden estar dadas como

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= \gamma_1, \\ \alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) &= \gamma_2. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5. *La ecuación $y'' + 16y = 0$ tiene como solución general $y = c_1\cos(4t) + c_2\sin(4t)$. Determinar las soluciones particulares de los problemas*

a) $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

b) $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$.

c) $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Ejemplo 3.6. *Considere el problema $xy'' - y' = 0$, sujeto a $y(0) = 1$, $y'(1) = 6$. Halle el intervalo donde la ecuación tiene solución única y la solución particular.*

3.2. Ecuaciones lineales homogéneas

Recordemos que la ecuación lineal homogénea es de la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{\mathrm{d}^{(k)}y}{\mathrm{d}x^k} = 0.$$

Haciendo D al operador de diferenciación, podemos asocual a la ecuación un operador de diferenciación:

$$L := \sum_{k=0}^{n} a_k(x)D^k.$$

En este contexto, las soluciones de la ecuación diferencial son “ceros” del operador L.

Teorema 3.7 (Principio de superposición)**.** *Sean $a_n(x), \dots, a_0(x)$ funciones continuas y consideramos la ecuación*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{\mathrm{d}^{(k)} y}{\mathrm{d}x^k} = 0.$$

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $y_1, \dots, y_k$ soluciones de la ecuación. Entonces, cualquier combinación lineal de estas soluciones también es solución de la ecuación.

Demostración. Sean $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ y L el operador diferencial asociado a la ecuación. Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, y_j es solución de la ecuación, es decir, $Ly_j = 0$. Además, como el operador L es lineal, tenemos

$$L\left(\sum_{j=1}^{k} c_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} L(c_j y_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j L(y_j) = 0.$$

Por lo tanto, $\sum_{j=1}^{k} c_j y_j$ es solución de la ecuación. □

De este resultado se desprende facilmente que si tenemos una solución, cualquier múltiplo de ella también será solución de la ecuación.

Definición 3.8. *Sean $f_1, \dots, f_n$ funciones continuas. Decimos que la familia $(f_j)_{j=1}^{n}$ es linealmente dependiente si existen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ no todas cero, tales que*

$$c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n = 0.$$

En caso contrario, diremos que la familia es linealmente independiente. Es decir, para cada $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$,

$$c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n = 0 \implies c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

Supongamos que abordamos el problema

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{\mathrm{d}^{(k)} y}{\mathrm{d}x^k} = 0,$$

sujeto a $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $\dots y^{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Supongamos además que tenemos n soluciones de la ecuación, y_1, $y_2, \dots, y_n$. La solución general de la ecuación tiene la forma

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = 0,$$

donde $c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}$. Sustituyendo y en los valores iniciales tenemos

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) &= y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) &= y_0' \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y y_n^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales. Si tiene solución, encontramos los valores de $c_1, \dots, c_n$. El sistema tendrá solución si

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Este determinante se llama *wronskiano* de $y_1, \dots, y_n$. Lo denotamos como $W(y_1, \dots, y_n)$.

Si un conjunto de soluciones satisface que $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$, para toda x en la región donde se busca resolver el problema, estas soluciones son linealmente independientes. En este caso, decimos que es un *conjunto fundamental de soluciones*.

Teorema 3.9. *Sean $y_1, \dots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{\mathrm{d}^{(k)} y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Entonces, la solución general de la ecuación es $y = c_1 y_1 + \cdots c_n y_n$.

En términos de operadores, el espacio nulo del operador diferencial asociado a la ecuación es un espacio vectorial. La base de este espacio es un conjunto linealmente independiente de soluciones de la ecuación. Por lo tanto, cualquier solución de la ecuación es una combinación lineal del conjunto funamental de soluciones.

Ejemplo 3.10. *Consideramos la ecuación $y'' - 9y = 0$. Las funciones $y_1 = \mathrm{e}^{3x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{-3x}$ son un conjunto fundamental de soluciones:*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{-3x} \\ 3\,\mathrm{e}^{3x} & -3\,\mathrm{e}^{-3x} \end{vmatrix} = -3\,\mathrm{e}^{3x-3x} - 3\,\mathrm{e}^{3x-3x} = -9 \neq 0.$$

Por lo tanto, la solución general de esta ecuación es $y = c_1\,\mathrm{e}^{3x} + c_2\,\mathrm{e}^{-3x}$.

3.3. Reducción de orden

Supongamos que tenemos una solución y_1, para una ecuación de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Para hallar una segunda solución, proponemos $y = v(x)y_1(x)$. Calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned} y' &= v'y_1 + vy_1'. \\ y'' &= v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + p(x)(v'y_1 + vy_1') + vy = 0. \\ v(y_1'' + p(x)y_1' + y) + v''y_1 + 2v'y_1' + p(x)v'y_1 = 0. \end{aligned}$$

El primer sumando en la última ecuación es 0, pues y_1 es solución de la ecuación original. Entonces, nos queda la ecuación

$$v''y_1 + v'(2y_1' + p(x)y_1) = 0.$$

Haciendo $u = v'$, podemos reescribir como una ecuación de variables separables:

$$u'y_1 + u(2y_1' + p(x)y_1) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación y sustituyendo en $y = vy_1$ encontramos la segunda solución a la ecuación original.

Ejemplo 3.11. *Sabemos que $y_1(x) = \frac{1}{x}$ es una solución de la ecuación diferencial*

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0.$$

Encontrar otra solución de la ecuación diferencial.

Demostración. Proponemos la otra solución como $y = v(x)y_1(x) = \frac{v(x)}{x}$. Derivando, tenemos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{v'(x)}{x} - \frac{v(x)}{x^2}. \\ y'' &= \frac{v''(x)}{x} - 2\frac{v'(x)}{x^2} + 2\frac{v(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación,

$$2x^2\left(\frac{v''(x)}{x} - 2\frac{v'(x)}{x^2} + 2\frac{v(x)}{x^3}\right) + 3x\left(\frac{v'(x)}{x} - \frac{v(x)}{x^2}\right) + \frac{v(x)}{x} = 0.$$
$$2xv''(x) - v'(x) = 0.$$

Haciendo $u = v'$, tenemos una ecuación de variables separables. Resolvemos esa ecuación

$$\begin{aligned} 2xw' &= w \\ \frac{\mathrm{d}w}{w} &= \frac{\mathrm{d}x}{2x} \\ \ln(w) &= \frac{1}{2}\ln(x) + C \\ \ln(w) &= \ln(x^{\frac{1}{2}}) + C. \end{aligned}$$

Aplicando la exponencial de ambos lados, tenemos $w = v' = Cx^{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, $v = C\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$. Sustituyendo en y,

$$y = \frac{v(x)}{x} = Cx^{\frac{1}{2}}.$$

□

3.4. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Sean $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Consideramos la ecuación

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Proponemos la solución de esta ecuación como $y = \mathrm{e}^{mx}$. Sustituyendo en la ecuación

$$a_2 m^2 \mathrm{e}^{mx} + a_1 m \mathrm{e}^{mx} + a_0 \mathrm{e}^{mx} = 0.$$

Para toda $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{mx} \neq 0$. Por lo tanto, tenemos la ecuación polinomial

$$a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0. \tag{7}$$

Si el polinomio (7) tiene raíces iguales, es decir, $m_1 = m_2$, entonces $m_1 = -\frac{a_1}{2a_2}$. Luego, una solución es $y_1 = \mathrm{e}^{m_1 x}$. Para hallar la otra solución, proponemos $y = u(x)y_1$. Sustituyendo en la ecuación y reorganizando términos,

$$\begin{aligned} a(u'' y_1 + 2u'y' + uy_1'') + a_1(u'y + uy_1') + a_0 uy &= 0 \\ u(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y) + a_2 u'' y_1 + 2a_2 u' y_1' + a_1 u' y_1 &= 0 \\ a_2 u'' y_1 + 2a_2 u' y_1' + a_1 u' y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo de manera explícita $y_1 = \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x}$, tenemos

$$\begin{aligned} a_2 u'' \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x} - 2\frac{a_1}{2a_2} a_2 u' \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x} + a_1 u' \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x} &= 0 \\ a_2 u'' &= 0 \end{aligned}$$

Integrando dos veces, $u = c_1 x + c_2$. Por lo tanto, $y = c_1 x \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x} + c_2 \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x}$. Las funciones $x \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x}$ y $\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x}$ son un conjunto fundamental de soluciones. Por lo tanto, la solución general de la ecuación es $y = c_1 x \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x} + c_2 \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2a_2}x}$.

Si el polinomio (7) tiene raíces distintas m_1 y m_2, tenemos los siguientes casos:

$m_1, m_2 \in \mathbb{R}$. En este caso, las soluciones son $y_1 = \mathrm{e}^{m_1 x}$ y $y_2 = \mathrm{e}^{m_2 x}$. Además, estas funciones son un conjunto fundamental de soluciones.

$m_1, m_2 \in \mathbb{C}$. En este caso, $m_1 = a + \mathrm{i}\, b$ y $m_2 = \overline{m_1} = a - \mathrm{i}\, b$. Entonces, utilizando el hecho de que para cada $r \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, r} = \cos(r) + \mathrm{i} \sin(r)$; las soluciones son

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathrm{e}^{ax}(\cos(b) + \mathrm{i} \sin(b)) \\ y_2 &= \mathrm{e}^{ax}(\cos(b) - \mathrm{i} \sin(b)) \end{aligned}$$

Sin embargo, $u(x) = \mathrm{e}^{ax} \cos(b)$ y $v(x) = \mathrm{e}^{ax} \sin(b)$ son soluciones de valores reales de la ecuación y son linealmente independientes. Por lo tanto, estas funciones forman el conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo 3.12. *Encontrar la solución general de la ecuación*

$$2y'' - y' - y = 0.$$

Demostración. El polinomio asociado a la ecuación es

$$2r^2 - r - 1 = 0.$$

Las raíces de este polinomio son $m_1 = \frac{3}{2}$ y $m_2 = -1$. Luego, las soluciones de la ecuación diferencial son $y_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Como son soluciones linealmente independientes, la solución general es $y = C_1 \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + C_2 \mathrm{e}^{-x}$. □

3.5. Ecuaciónes de Cauchy–Euler

Una ecuación de Cauchy–Euler es de la forma

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0,$$

a_2, a_1, a_0 son constantes. Proponemos la solución de estas ecuaciones como $y = x^m$. Hallaremos valor de m al sustituir en la ecuación. Calculando las derivadas, tenemos

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} a_2x^2(m(m-1)x^{m-2}) + a_1xmx^{m-1} + a_0x^m &= 0 \\ x^m(a_2m(m-1) + a_1m + a_0) &= 0 \\ a_2m^2 + (a_1 - a_2)m + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el último polinomio, encontramos el valor de m. Sean r_1, r_2 las raíces del polinomio.

Si el polinomio tiene raíces iguales, entonces $r_1 = \frac{a_2 - a_1}{2a_2}$. Luego, una solución es $y_1 = x^{r_1}$. Para hallar la otra solución proponemos $y = u(x)y_1(x)$. Sus derivadas son

$$y' = x^{m-1}(xu' + um), \qquad y'' = x^{m-1}(u''m^2 + 2u'mx + um(m-1)).$$

Sustituyendo en la ecuación, obtenemos

$$a_2u''x^2 + xu'(2a_2m + a_1) = 0.$$

Recordando que $m = \frac{a_2 - a_2}{2a_2}$,

$$a_2u''x^2 + a_2xu' = 0.$$

Haciendo $v = u'$, tenemos

$$\frac{v'}{v} = -\frac{1}{x}.$$

Integrando,

$$\ln(v) = \ln\frac{1}{x}.$$

Es decir, $v = \frac{1}{x}$. Por lo tanto $u = \ln x$. Sustituyendo en y, la solución es

$$y = x^{r_2}\ln x.$$

Entonces, tenemos los siguientes casos:

$r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ En este caso, $r_1 = a + \mathrm{i}\, b$ y $r_2 = \overline{r_1} = a - \mathrm{i}\, b$. Haciendo $x^{\mathrm{i}\, b} = (\mathrm{e}^{\ln(x)})^{\mathrm{i}\, b}$, las soluciones son

$$y_1 = x^a(\cos(b\ln x) + \mathrm{i}\sin(b\ln x)),$$
$$y_2 = x^a(\cos(b\ln x) - \mathrm{i}\sin(b\ln x)).$$

Sin embargo, $u(x) = x^a\cos(b\ln x)$ y $v(x) = x^a\sin(b\ln x)$ son soluciones de valores reales de la ecuación y son funciones de valores reales. Por lo tanto, estas funciones conforman el conjunto fundamental de soluciones.

$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ Si $r_1 \neq r_2$, entonces las soluciones son $y_1 = C_1x^{r_1}$ y $y_2(x) = C_2x^{r_2}$. Si $r_1 = r_2$, hemos visto que las soluciones son $y_1(x) = C_1x^{r_1}$ y $y_2(x) = C_2x^{r_1}\ln x$.

4. Ecuaciones lineales no homogéneas

Ahora estudiaremos métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Es decir, ecuaciones que se escriben de la forma

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Supongamos que tenemos dos soluciones de la ecuación, digamos $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$. Considerando el operador diferencial L, asociado a la ecuación, tenemos que

$$LY_1 = g(x),$$
$$LY_2 = g(x).$$

Por lo tanto, $L(Y_1 - Y_2) = LY_1 - LY_2 = g(x) - g(x) = 0$. Es decir, $Y_1 - Y_2$ es solución de la ecuación homogénea. Luego, $Y_1 = C_1y_1 + C_2y_2 + Y_2$. Entonces, la solución de la ecuación no homogénea será la solución general de la ecuación homogénea agregando una función Y_2 tal que $LY_2 = g(x)$.

4.1. Método de coeficientes indeterminados

Supongamos que tenemos una ecuación de la forma

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Si g es una función polinomial, exponencial o trigonométrica, proponemos una solución de la ecuación no homogénea de la siguiente forma:

- Si $g(x) = A_0 + A_1 x + \cdots A_n x^n$, proponemos la solución como un polinomio del mismo grado $Y(x) \coloneqq B_0 + B_1 x + \cdots + B_n x^n$.
- Si $g(x) = A\,\mathrm{e}^{bx}$, proponemos $Y(x) \coloneqq B_1 e^{bx}$.
- Si $g(x) = A\sin(ax)$ o $g(x) = A\cos(bx)$, proponemos $Y(x) \coloneqq B_1\cos(bx) + B_2\sin(bx)$.

Los coeficientes de las soluciones que se proponen son incógnitas que debemos resolver al sustituir en la ecuación original.

Ejemplo 4.1. *Encontrar la solución de*

$$y'' - 3y' - 4y = 3\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Demostración. Primero hallamos la solución de la ecuación homogénea $y'' - 3y' - 4y = 0$. El polinomio característico de esta ecuación es

$$r^2 - 3r - 4 = 0.$$

Sus raíces son $r_1 = 4$, $r_2 = -1$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1\,\mathrm{e}^{4x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}$. Para hallar la solución de la ecuación no homogénea proponemos $Y(x) = A\,\mathrm{e}^{2x}$. Derivando y sustituyendo en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} (4A - 6A - 4A)\,\mathrm{e}^{2x} &= 3\,\mathrm{e}^{2x} \\ -6A &= 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A = -\frac{1}{2}$. La solución de la ecuación no homogénea es

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{4x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}. \qquad \square$$

Ejemplo 4.2. *Encontrar la solución de*

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x).$$

Demostración. Del ejemplo anterior tenemos que la solución de la ecuación homogénea es $y = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 \mathrm{e}^{-x}$. Para la ecuación no homogénea proponemos $Y(X) = A_1 \cos(x) + A_2 \sin(x)$. Derivando y sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$(-A + 3B - 4A)\sin(x) + (-B - 3A - 4B)\cos(x) = 2\sin(x).$$

Por lo tanto, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} -5A + 3B &= 2 \\ -3A - 5B &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, $A = -\frac{5}{17}$ y $B = \frac{3}{17}$. Por lo tanto, la solución de la ecuación no homogénea es

$$y = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} - \frac{5}{17}\cos(x) + \frac{3}{17}\sin(x).$$ □

4.2. Variación de parámetros

Consideramos una ecuación diferencial no homogénea de orden 2.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(y) = g(x).$$

Escribimos la ecuación en la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x) = f(x). \tag{8}$$

Supongamos que tenemos dos soluciones linealmente idependientes de la ecuación homogénea, digamos y_1 y y_2. Para la ecuación no homogénea proponemos la solución $y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, donde u_1 y u_2 son funciones desconocidas. Derivando y tenemos

$$\begin{aligned} y' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y'' &= u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + 2u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

Como y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea, al sustituir y, y' y y'' en 8, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y_1u_1' + y_2u_2'] + P(x)(y_1u_1`y_2u_2') + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x).$$

Para simplificar los cálculos hacemos $y_1u_1`y_2u_2' = 0$. Entonces,

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x).$$

Así, para cada x tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 u_1' `y_2 u_2' &= 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' &= f(x) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema por la regla de Cramer, para cada x,

$$u_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \quad u_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)}$$

donde

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Las funciones u_1 y u_2 se encuentran integrando u_1' y u_2'. La solución general de la ecuación es

$$y_g(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2.$$

Ejemplo 4.3. *Encontrar la solución de*

$$y'' + 9y = \frac{1}{4} \csc 3x.$$

Demostración. Primero resolvemos la ecuación homogénea

$$y'' + 9y = 0.$$

Las raíces del polinomio característico $r^2 + 9 = 0$son $r_1 = 3\,\mathrm{i}$ y $r_2 = -3\,\mathrm{i}$. entonces, la solución general de la ecuación homogénea es $y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$. Para hallar la solución de la ecuación no homogénea proponemos $y_h = u_1(x)\cos(3x) + u_2(x)\sin(3x)$, donde

$$u_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \quad u_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)};$$

y

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Sustituyendo los valores tenemos: □

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = 3,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin(3x) \\ \frac{1}{4}\csc(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{4},$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos(3x) & 0 \\ -3\sin(3x) & \frac{1}{4}\csc(3x) \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}(3x).$$

Luego,

$$u_1'(x) = -\frac{1}{12}, \quad u_2'(x) = \frac{1}{12}\operatorname{ctg}(3x).$$

Integrando $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$,

$$u_1(x) = -\frac{1}{12}x, \quad u_2(x) = \frac{1}{12}\ln(\sin(3x)).$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) - \frac{1}{12}x\cos(3x) + \frac{1}{12}\sin(3x)\ln(\sin(3x)).$$

5. Transformada de Laplace

5.1. Definiciones y propiedades básicas

La transformada de Laplace resulta útil para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. La uso de esta transformación es conveniente. Buscamos convertir la ecuación diferencial en una ecuación algebráica que en la mayoría de los casos es mucho más simple que la ecuación diferencial.

Veremos algunas definiciones antes de llegar a la transformada de Laplace.

Definición 5.1. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Decimos que f es continua a trozos si f es continua a trozos, si para cada $x \in [a,b]$, salvo una cantidad finita de puntos, f es continua en x.*

Definición 5.2. *Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama de tipo exponencial o de orden exponencial si existen constantes K y a tales que para toda $t \in \mathbb{R}$,*

$$|f(t)| \leq K\,\mathrm{e}^{at}.$$

Sea $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones de orden exponencial y continuas a trozos en $\mathbb{R}$.

Definición 5.3. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida. Sea* $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$ *continua e integrable y sea* $D \subseteq X$. *Definimos* $P\colon \mathcal{F} \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *mediante*

$$P[f(t)] \coloneqq \int_D K(s,t) f(t)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

La función K *se llama kernel del operador* P.

Definición 5.4. *Definimos la transformada de Laplace como el operador* $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *como*

$$\mathcal{L}[f(t)] \coloneqq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Note que $\mathcal{L}[f(t)]$ es una función de s.

Proposición 5.5. *Sea* $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. *Entonces,* $\mathcal{L}[f(t)]$ *está bien definido.*

Demostración. Como $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, existen K y a tales que para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq K\,\mathrm{e}^{at}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f(t)]| &= \left| \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{-st} f(t)\right|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^{+\infty} K\,\mathrm{e}^{-t(a-s)}\,\mathrm{d}t = \frac{K}{s-a}. \end{aligned}$$

Es decir, la integral existe. Por ello, $\mathcal{L}[f(t)]$ está bien definido. □

Proposición 5.6. *El operador* $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *es lineal. Es decir, para cada* $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *y para todo* $a \in \mathbb{R}$,

$$[af(t) + g(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)].$$

Demostración. Mediante cálculo directo, utilizando las propiedades de la integral se obtiene el resultado. □

Proposición 5.7. *Sea* $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *y supongamos que* $f' \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. *Entonces,*

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

Demostración. El resultado se obtiene directamente, calculando la transformada de Laplace de f', integrando por partes. □

Definición 5.8. *Sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Para cada $s \in \mathbb{R}$, hacemos $F(s) \coloneqq \mathcal{L}[f(t)]$. Entonces, definimos la transformada inversa de Laplace de F como*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t).$$

Ejemplo 5.9. *Calcular la transformada de Laplace de una función constante.*

Demostración. Como la transformada de Laplace es lineal, basta calcular la transformada de la función constante 1. Es decir,

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-st}\right)\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-st} - 1\right) = \frac{1}{s}.$$

□

Ejemplo 5.10. *Calcular $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}]$.*

Demostración. Calculamos directamente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}] &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{-st}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(s-a)}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{a-s}\left(e^{-t(s-a)}\right)\Big|_0^{+\infty}\\ &= -\frac{1}{s-a}\left(\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(s-a)} - 1\right) = \frac{1}{s-a}.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.11. *Sea $c \in \mathbb{R}$. Calcular la transformada de Laplace de* $\sin(ct)$, $\cos(ct)$.

Demostración. Sabemos que $\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\cos(ct) = \cos(ct)$. Utilizando la proposición 5.7 dos veces, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(ct)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\cos(ct)\right] = \frac{s}{c^2}\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(ct)\right] - \sin(0)\\ &= \frac{s}{c^2}\left(s\mathcal{L}[\cos(ct)] - \cos(0)\right) = \frac{s^2}{c^2}\mathcal{L}[\cos(ct)] - \frac{s}{c^2}.\end{aligned}$$

Despejando $\mathcal{L}[\cos(ct)]$, tenemos

$$\mathcal{L}[\cos(ct)] = \frac{s}{s^2 - c^2}.$$

Razonando del mismo modo para $\sin(ct)$, tenemos

$$\mathcal{L}[\sin(ct)] = \frac{1}{s^2 - c^2}.$$

□

Ejemplo 5.12. *Sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y supongamos que existen n de sus derivadas y que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, $f^{(k)} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Calcular $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]$.*

Ejemplo 5.13. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcular $\mathcal{L}[t^n]$.*

Demostración. Calculamos directamente

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^{+\infty} t^n \, \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t.$$

Haciendo $u = st$, tenemos

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{s^{n+1}}. \qquad \square$$

Proposición 5.14. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin(bt)] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2},$$
$$\mathcal{L}[e^{at} \cos(bt)] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}.$$

Proposición 5.15. *$\mathcal{L}^{-1}$ es lineal.*

Proposición 5.16. *Sea $f \in \mathcal{P}([0, +\infty))$. Para cada $s \in \mathbb{R}$, hacemos $F(s) \coloneqq \mathcal{L}[f]$. Entonces, $\mathcal{L}[f]$ es derivable y*

$$F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)].$$

Definición 5.17. *Sea $c > 0$. Definimos $u_c \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ mediante*

$$u_c(t) \coloneqq \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c. \end{cases}$$

Proposición 5.18. *Para cada $c > 0$,*

$$\mathcal{L}[u_c] = \frac{e^{-cs}}{s}.$$

Proposición 5.19. *Sea $f \in \mathcal{P}([0, +\infty))$. Entonces,*

$$\mathcal{L}[u_c(t) f(t-a)] = e^{-as} \mathcal{L}[f(t)].$$

Definición 5.20. *Sean $f, g \in \mathcal{P}([0, +\infty))$. Definimos la convolución de f con g mediante*

$$(f * g)(x) \coloneqq \int_0^x f(x-t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Teorema 5.21. *Sean $f, g \in \mathcal{P}([0, +\infty))$. Entonces,*

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g].$$

5.2. Aplicación a las ecuaciones diferenciales

Ejemplo 5.22. *Utilizando la transformada de Laplace, resolver la ecuación*

$$y'' + y = \sin(\omega t).$$

Demostración. Aplicamos la transformada de Laplace a toda la ecuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + y] &= \mathcal{L}[\sin(\omega t)] \\ s^2 Y - sy(0) - y'(0) + Y &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Asociando términos, tenemos

$$Y = \frac{1}{s^2+1} + \frac{\omega}{(s^2+1)(s^2+\omega^2)}.$$

Escribimos el segundo sumando utilizando fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{(s^2+1)(s^2+\omega^2)} &= \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+\omega^2} \\ &= \frac{(As+B)(s^2+\omega^2) + (Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+\omega^2)}. \end{aligned}$$

Desarrollando los productos, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B + D &= 0 \\ A\omega^2 + C &= 1 \\ B\omega^2 + D &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega^2 - 1}, & B &= 0, \\ C &= -\frac{1}{\omega^2 - 1} & D &= 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\omega}{(s^2+1)(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^2-1}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{\omega^2-1}\frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Como $\mathcal{L}[\sin(t)] = \frac{1}{s^2+1}$, $\mathcal{L}[\cos(t)] = \frac{1}{s^2+1}$ y $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$, tenemos que la solución de la ecuación es

$$y = \mathcal{L}^{-1}[Y] = \sin(t) + \frac{1}{\omega^2-1}(\cos(t) - \sin(\omega t)).$$

□

Ejemplo 5.23. *Utilizando la transformada de Laplace, resolver la ecuación*

$$2y'' + y' + 2y = u_5(x), \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Demostración. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación, tenemos

$$\mathcal{L}[y](2s^2 + s + 1) = \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-5s}.$$

Despejando $\mathcal{L}[y]$,

$$\mathcal{L}[y] = \mathrm{e}^{-5s}\,\frac{1}{s(2s^2 + s + 1)}.$$

Separando el segundo factor por fracciones parciales,

$$\frac{1}{s(2s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{2s + 1}{2s^2 + s + 1}.$$

En el segundo sumando, completamos el cuadrado

$$\frac{2s + 1}{2s^2 + s + 1} = \frac{s + \frac{1}{2}}{s^2 + \frac{s}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}}.$$

Así,

$$\mathcal{L}[y] = \mathrm{e}^{-5s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{16}}\right)$$

Por la proposición 5.14,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \frac{1}{4}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} + \frac{\frac{1}{4}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}}\right]$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + \frac{1}{\sqrt{7}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)$$

Luego, por la proposición 5.19

$$y = u_5(t)\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(t-5)}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}(t-5)\right) + \frac{1}{\sqrt{7}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(t-5)}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}(t-5)\right)\right). \qquad \square$$

6. Seires de Fourier

6.1. Producto interno

Definición 6.1. *Sea V un espacio vectorial complejo. Una función $p\colon V \times V \to \mathbb{R}$ se llama producto interno en V si satisface las siguientes propiedades:*

a) p es lineal respecto al primer argumento:

$$p(\lambda x + y, z) = \lambda p(x, z) + p(y, z), \qquad \forall\, x, y, z \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

b) p es simétrica conjugada:

$$p(x, y) = \overline{p(y, x)}, \qquad \forall x, y \in V.$$

c) p es definida positiva:

$$p(x, x) > 0, \qquad \forall x \in V \setminus \{0\}.$$

Con estas propiedades es posible concluir propiedades adicionales de los productos internos.

Proposición 6.2. *Sea V un espacio vectorial real y $p\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Entonces, p es lineal conjugada respecto al segundo argumento, es decir,*

$$p(x, \lambda y + z) = \overline{\lambda} p(x, y) + p(x, z), \qquad \forall\, x, y, z \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Un espacio vectorial puede tener varios productos internos. Cuando el producto interno está fijo, una notación habitual para él es $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Así, en lugar de escribir $p(x, y)$, escribimos $\langle x, y \rangle$.

Proposición 6.3 (Desigualdad de Cauchy–Schwarz)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Demostración. Si $x = 0$, se tiene la igualdad.

Si $x \neq 0$, hacemos $\lambda := \frac{\langle x,y \rangle}{\langle x,x \rangle}$ y $z := y - \lambda x$. Utilizando la linealidad del producto interno, observamos que $\langle x, z \rangle = 0$. Luego, $\langle z, z \rangle = \langle y, y \rangle - \frac{(\langle x,y \rangle)^2}{\langle a,a \rangle}$. Como el producto interno es definido positivo, se cumple la desigualdad deseada. □

Ejemplo 6.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Hacemos $\mathcal{P}_n := \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \colon \ \deg(f) \leq n\}$. En $\mathcal{P}_n$ definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathcal{P}_n^2 \to \mathbb{C}$ mediante*

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 \overline{g(t)} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Entonces, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $\mathcal{P}_n$.

6.2. Series de Fourier

En adelante, consideraremos $\mathcal{H} \coloneqq \mathrm{L}_2([0, 2\pi))$ con la medida $\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\mu$, donde μ es la medida de Lebesgue usual. Definimos el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathcal{H}^2 \to \mathbb{C}$ mediante

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g}(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$$

También, utilizaremos el hecho de que para cada $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$.

Definición 6.5. *Para cada $k \in \mathbb{Z}$, hacemos*

$$\varphi_k(t) \coloneqq \mathrm{e}^{-kit} .$$

Una base de $\mathcal{H}$ es $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Veremos que es una base ortonormal.

Lema 6.6. *Para cada $m \in \mathbb{Z}$,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_m \, \mathrm{d}\mu = \delta_{m,0}.$$

Lema 6.7. *Para cada $p, q \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{aligned} \varphi_p \varphi_q &= \varphi_{p+q} \\ \overline{\varphi_p} &= \varphi_{-p}. \end{aligned}$$

Lema 6.8. *Para cada $p, q \in \mathbb{Z}$,*

$$\langle \varphi_p, \varphi_q \rangle = \delta_{p,q}.$$

Como $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es base ortonormal de $\mathcal{H}$, para cada $f \in \mathcal{H}$, podemos escribir

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_k,$$

donde para cada $k \in \mathbb{Z}$, $a_k = \langle f, \varphi_k \rangle$.

Ejemplo 6.9. *Calcular la serie de Fourier de $f(x) = x$.*

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$a_k = \langle f, \varphi_k \rangle.$$

Entonces, integrando por partes y usando el lema 6.6,

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \, \mathrm{e}^{ikt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{ik} (-1)^k = \frac{i}{k} (-1)^{k+1}.$$

Luego,

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{i}{k}(-1)^{k+1}\varphi_k.$$

Notamos que la serie se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi i}{k}(-1)^{k+1}\varphi_k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi i}{-k}(-1)^{-k+1}\varphi_{-k}.$$

Además, tomando el k-ésimo término de cada suma, tenemos

$$a_k\varphi_k = \overline{a_{-k}\varphi_{-k}}.$$

Luego, por las propiedades de los números complejos,

$$\begin{aligned}
a_k\varphi_k + a_{-k}\varphi_{-k} &= a_k\varphi_k + \overline{a_k\varphi_k} \\
&= 2\mathrm{Re}(a_k\varphi_k) = 2\mathrm{Re}\left(\frac{i}{k}\,\mathrm{e}^{-ikt}\right) \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\frac{i}{k}(\cos(kt) - i\sin(kt))\right) \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\frac{2}{k}(\sin(kt) + i\cos(kt))\right) \\
&= \frac{2}{k}\sin(kt).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir ambas series como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k}\sin(kt).$$

□