1. $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial

En este curso estudiaremos la geometría de $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideraremos $\mathbb{R}^n$ como

$$\mathbb{R}^n \coloneqq \{x \colon \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}\}.$$

Escribiremos el valor cada elemento de $\mathbb{R}^n$ con un subíndice y todos sus valores serán escritos como una columna. Es decir, cada $x \in \mathbb{R}^n$ será escrito como

$$x = [x_j]_{j=1}^n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Con estas definiciones es inmediata la siguiente proposición.

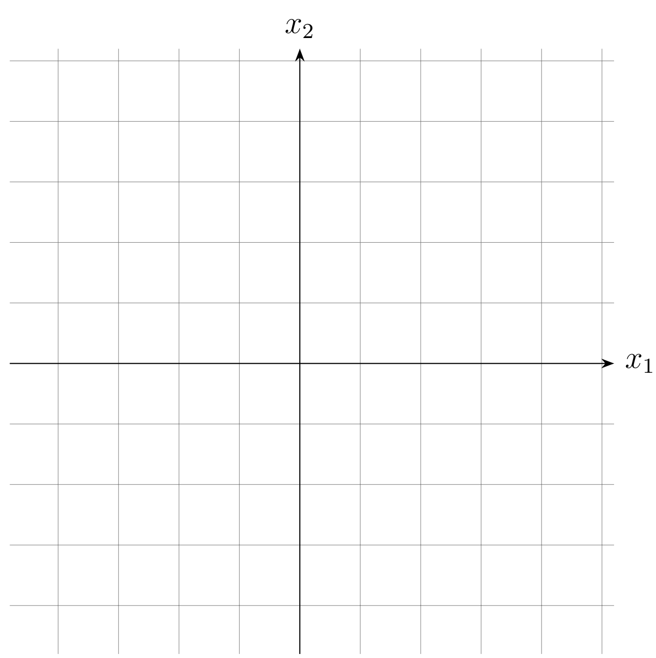
Proposición 1. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$x = y \iff \forall\, j \in \{1, \dots, n\}, \quad x_j = y_j.$$

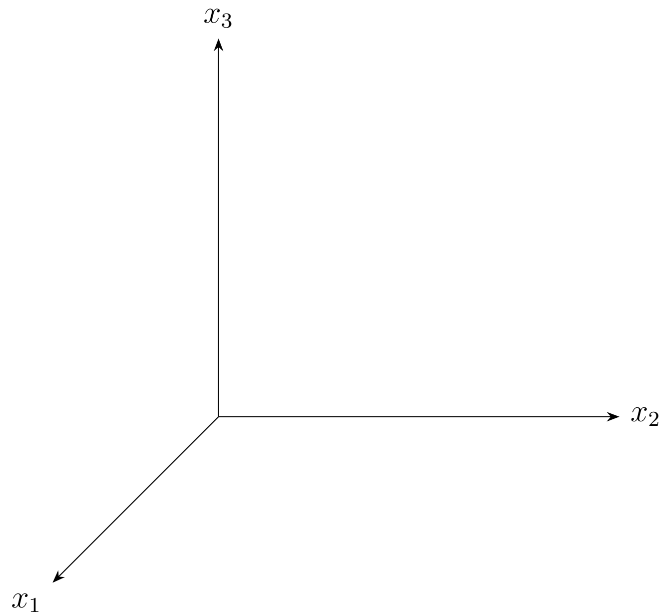
Demostración. Se sigue utilizando los criterios de igualdad de funciones. □

En particular, los elementos de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ se pueden representar en el plano cartesiano.

Represantaremos $\mathbb{R}^2$ mediante el siguiente modelo.



Para $\mathbb{R}^3$ utilizaremos el siguiente modelo:



Definición 2. *En $\mathbb{R}^n$ definimos las operaciones* suma *y* producto por escalar*, respectivamente, de la siguiente manera:*

$$
\begin{aligned}
&+ \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, && \odot \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\\
&[x_j]_{j=1}^n + [y_j]_{j=1}^n = [x_j + y_j]_{j=1}^n, && \lambda \odot [x_j]_{j=1}^n = [\lambda x_j]_{j=1}^n.
\end{aligned}
$$

Observación 3. *Debemos notar que aunque el símbolo para la suma en $\mathbb{R}^n$ es el mismo que la suma en $\mathbb{R}$, estamos tratando con objetos de naturaleza distinta. Sumar columnas o listas de números y sumar números reales, son operaciones muy diferentes.*

Proposición 4. *$\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial real con la suma y el producto por escalar. Es decir, $\mathbb{R}^n$ con estas operaciones satisface las siguientes condiciones:*

1. *$+$ es conmutativa.*
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x + y = y + x.$$

2. *$+$ es asociativa.*
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

3. *En $\mathbb{R}^n$ existe un neutro aditivo.*
$$\exists\, v \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x + v = v + x = x.$$

4. Existen los inversos respecto a +.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \exists\, u \in \mathbb{R}^n, \quad x + u = u + x = v.$$

5. Existe un neutro respecto al producto por escalar.

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi\, x = x.$$

6. $\odot$ es asociativa.

$$\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^m, \quad \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot x) = (\lambda_1 \lambda_2) \odot x.$$

7. + es distributiva respecto a $\odot$.

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \odot (x + y) = \lambda \odot x + \lambda \odot y.$$

8. La suma en $\mathbb{R}$ es distributiva respecto a $\odot$.

$$\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad (\lambda_1 + \lambda_2) \odot x = \lambda_1 \odot x + \lambda_2 \odot x.$$

A los elementos de un espacio vectorial les llamamos vectores. Así, los elementos de $\mathbb{R}^n$ son vectores.

Proposición 5. *Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $v_j = 0$, en el inciso 3 de la proposición 4.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$x_j + v_j = x_j.$$

Por lo tanto, $v_j = 0$. □

En adelante, denotaremos por 0 al vector v.

Proposición 6. *Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $u_j = -x_j$, en el inciso 4 de la proposición 4. Es decir, $u = -1 \odot x$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$u_j + x_j = 0.$$

Por lo tanto, $u_j = -x_j$. Así,

$$u = [-x_j]_{j=1}^n = -1[x_j]_{j=1}^n = -1 \odot x.$$ □

En adelante, evitaremos el uso de $\odot$. es decir, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, haremos $\lambda x \coloneqq \lambda \odot x$. En particular, $-1 \odot x = -1x = -x$.

Ejercicios

1. Demostrar que $\mathbb{R}^2$ es espacio vectorial real.

2. Dibujar los siguientes vectores:

   i) En $\mathbb{R}^2$:
   $$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ d = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   ii) En $\mathbb{R}^3$:
   $$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. En $\mathbb{R}^2$ sean $a = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calcular y dibujar en el plano:

   i) $2a + 3b$.

   ii) $a + b$.

   iii) $a - 3b + 2c$.

4. Encontrar el vector $x \in \mathbb{R}^3$ que resuelve cada ecuación:

   i) $3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2x = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 3x$.

   a) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 6x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - x$.