1. Espacios generados por conjuntos

Proposición 1. *Sean V un espacio vectorial y $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de subespacios de V. Entonces,*

$$\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha < V.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha$. Entonces, para cada $\alpha \in I$, $u, v \in U_\alpha$. Como cada U_α es subespacio de V, $\lambda u - v \in U_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Por lo tanto,

$$\lambda u - v \in \bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha.$$

$\square$

Definición 2. *Sea V un espacio vectorial y $U \subseteq V$. Denotaremor por $\mathcal{C}(U)$ al conjunto de subespacios de V que contienen a U. Es decir,*

$$\mathcal{C}(U) \coloneqq \{X < V : \ U \subseteq V\}.$$

Definición 3. *Sea V un espacio vectorial y $U \subseteq V$. El espacio generado por U es*

$$\langle U \rangle \coloneqq \bigcap_{X\in\mathcal{C}(U)} X.$$

2. Combinaciones lineales y bases

Definición 4. *Sean V un espacio vectorial, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Una combinación lineal de la lista de vectores $(v_1, \ldots, v_n)$ es*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Definición 5. *Sean V un espacio vectorial y $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Denotamos el conjunto de combinaciones lineales de $(v_1, \ldots, v_n)$ por $\ell(v_1, \ldots, v_n)$. Es decir,*

$$\ell(v_1, \ldots, v_n) \coloneqq \{u \in V : \ \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \ u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n\}.$$

Proposición 6. *Sea V un espacio vectorial y $v_1, \ldots, v_n \in V$. Entonces,*

$$\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle = \ell(v_1, \ldots, v_n).$$

Definición 7. *Sea V un espacio vectorial y $v_1, \ldots, v_n \in V$. Decimos que $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes si existen $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ no todos 0 tales que*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Decimos que $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes si para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$, implica

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Ejemplo 8. *Sean $a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$. Note que $2a - b + c = 0$. Por lo tanto, a, b, c son linealmente dependientes.*

Definición 9. *Sean V un espacio vectorial y $u_1, \ldots, u_m \in V$. Decimos que $(u_j)_{j=1}^m$ es base de V si $(u_j)_{j=1}^m$ son linealmente independientes y $\ell(u_j)_{j=1}^m = V$.*

Ejemplo 10. *Los vectores canónicos $(e_j)_{j=1}^n$ son una base de $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 11. *En $\mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ son una base.*

3. Proceso de ortogonalización

Sea V un espacio vectorial con producto interno. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Queremos encontrar $b_1, \ldots, b_m \in V$ tales que para cada $j, k \in \{1, \ldots, m\}$, $\langle b_j, b_k \rangle = \delta_{j,k}$ y

$$\ell(a_1, \ldots, a_m) = \ell(b_1, \ldots, b_m).$$

Si suponemos que los vectores $(b_j)_{j=1}^k$ $(k < n)$ ya estan construidos, el siguiente se puede obtener con el operador de proyección ortogonal:

$$b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} P_{b_j} a_{k+1}.$$

Así, para construir los vectores $(b_j)_{j=1}^m$ primero hacemos $b_1 = a_1$ y posteriormente aplciamos la fórmula anterior a los vectores $(a_j)_{j=2}^m$.

Ejercicios

1. Sea $v \in V$. Demuestre que la lista que solo tiene al vector v es linealmente dependiente si y solo si $v = 0$.

2. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Supongamos que existen $p, q \in \{1, \ldots, m\}$, $p \neq q$ tales que $a_p = a_q$. Demuestre que la lista de vectores es linealmente dependiente.

3. A partir de los ejercicios anteriores:

   a) ¿Cómo debe ser el vector de la lista de un solo elemento para que la lista sea linealmente independiente?

   b) ¿Cómo son entre sí los vectores de una lista linealmente independiente de vectores?

4. Sean $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1} \in V$ tales que $(a_j)_{j=1}^m$ es linealmente independiente y $(a_j)_{j=1}^{m+1}$ es linealmente dependiente. Demuestre que $a_{m+1} \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$.

5. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y $S < V$. Demuestre que $a_1, \ldots, a_m \in S$ si y solo si
$$\ell(a_1, \ldots, a_m) \subseteq S.$$

6. Ortogonalizar los vectores
$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

7. Considere el espacio de polinomios $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ con el producto interno
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$
Ortogonalizar los polinomios $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$, $p_4(x) = x^3$.