

## Bases ortonormales

**Definición 1.** Sea  $V$  un espacio vectorial y  $\mathcal{B} := (b_1, \dots, b_n)$  una lista de vectores en  $V$ . Decimos que  $\mathcal{B}$  es una lista ortogonal si para cada  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \neq k$ ,

$$b_j \perp b_k.$$

**Definición 2.** Sean  $V$  un espacio vectorial y  $\mathcal{B} := (b_1, \dots, b_n)$  una lista de vectores de  $V$ . Decimos que  $\mathcal{B}$  es base ortonormal de  $V$  si  $\mathcal{B}$  es una base de  $V$  y una lista ortonormal de vectores. Es decir,  $\mathcal{B}$  es base ortonormal de  $V$  si  $\mathcal{B}$  genera a  $V$  y si para cada  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\langle b_j, b_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

**Proposición 3.** Sean  $V$  un espacio vectorial,  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  una base ortonormal de  $V$  y  $v \in V$ . Entonces,

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v, b_j \rangle b_j.$$

*Demostración.* Ejercicio. □

**Proposición 4.** Sean  $V$  un espacio vectorial,  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  una base ortonormal de  $V$  y  $v, w \in V$ . Entonces,

$$\|v_{\mathcal{B}}\| = \|v\|, \quad \langle v_{\mathcal{B}}, w_{\mathcal{B}} \rangle = \langle v, w \rangle.$$

*Demostración.* Ejercicio. □

**Proposición 5.** Sea  $V$  un espacio vectorial y  $\mathcal{B} := (b_1, \dots, b_n)$  una lista ortonormal de vectores en  $V$ . Entonces, son equivalentes:

1.  $\mathcal{B}$  es una base ortonormal de  $V$ .
2.  $\dim(V) = n$ .
3. Para cada  $v \in V$ , si  $v \in \mathcal{B}^\perp$ , entonces  $v = 0$ .
4. Para cada  $v \in V$ ,

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle v, b_j \rangle^2.$$

*Demostración.* 1  $\implies$  2 Se tiene por definición de dimensión de espacio vectorial.

2  $\implies$  3 Suponemos que  $\dim(V) = n$  y sea  $x \in \mathcal{B}^\perp$ . Entonces,

$$x = \sum_{j=1}^n \langle x, b_j \rangle b_j = \sum_{j=1}^n 0 b_j = 0.$$

3  $\implies$  4 Ejercicio. (Sugerencia: Sea  $x \in V$  y hacemos  $x_0 = \sum_{j=1}^n \langle x, b_j \rangle b_j$ . Demostrar que  $x - x_0 \in \mathcal{B}^\perp$  y calcular la norma de  $x_0$ ).

4  $\implies$  1 Ejercicio. □

## Ejercicios

1. Sea  $V$  un espacio vectorial y  $\mathcal{B} = (a_1, \dots, a_m)$  una lista de vectores ortogonales. Demuestre que para cada  $v \in \ell(\mathcal{B})$ ,

$$v = \sum_{j=1}^m \frac{\langle v, a_j \rangle}{\|a_j\|} a_j.$$

2. Sean  $V$  un espacio vectorial y  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  una lista ortonormal de vectores. Demostrar que  $\mathcal{B}$  es linealmente independiente.
3. Sean  $b_1, \dots, b_m \in V$  vectores ortogonales entre sí. Demostrar que

$$\left\| \sum_{j=1}^m b_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^m \|b_j\|^2.$$

4. Demostrar la proposición 3.
5. Demostrar la proposición 4
6. Demostrar la proposición 5.