Cambios de base

Sea V un espacio vectorial y supongamos que tenemos dos bases para V: $\mathcal{E} \coloneqq (e_1, \ldots, e_n)$ y $\mathcal{F} \coloneqq (f_1, \ldots, f_n)$.

Sea $v \in V$ y supongamos que v se escribe en la base $\mathcal{F}$ como

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j.$$

La matriz de cambio de base de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{E}$ es

$$P_{\mathcal{F}\to\mathcal{E}} \coloneqq \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Para escribir v en la base $\mathcal{E}$, escribimos los vectores de $\mathcal{F}$ en términos de la base $\mathcal{E}$. Es decir, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ encontramos $\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,n} \in \mathbb{R}$ tales que

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k} e_k.$$

Sustituyendo en v,

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k} e_k \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k} x_j e_k.$$

La última igualdad se puede escribir en términos de la matriz $P_{\mathcal{F}\to\mathcal{E}}$:

$$v = \sum_{k=1}^{n} (P_{\mathcal{F}\to\mathcal{E}} x)_k e_k.$$

Así, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, el coeficiente j–ésimo de v en la base $\mathcal{E}$ es $P_{(\mathcal{F}\to\mathcal{E}} x)_j$.

Ejemplo 1. *Sea $\mathcal{E}$ la base canónica en $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{F} \coloneqq \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$. Encontrar la matriz de cambio de base de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ y escribir el vector $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ en la base $\mathcal{F}$.*

Demostración. La matríz de cambio de base de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{E}$ es

$$P_{\mathcal{F}\to\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Invertimos $P_{\mathcal{F}\to\mathcal{E}}$ para encontrar la matriz de cambio de base de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$. Para esto, realizamos operaciones de renglón a la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 = R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 = 2R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como hemos obtenido la matriz identidad del lado izquierdo, la matriz de cambio de base $\mathcal{E}$ a la base $\mathcal{F}$ es

$$P_{\mathcal{E}\to\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para escribir a x en la base $\mathcal{F}$ hacemos el producto $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}x$

$$P_{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ □

Definición 2. *Sean V, W espacios vectoriales, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ y $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ bases de V y W, respectivamente y $T \colon V \to W$ una transformación lineal. La matriz asociada a T en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ es la matriz que tiene en sus columnas los vectores $(Ta_1)_{\mathcal{B}}$, ..., $(Ta_n)_{\mathcal{B}}$, es decir,*

$$T = \begin{bmatrix} (Tb_1)_{\mathcal{B}} & \cdots & (Tb_n)_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3. *Sea $T \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, tal que para cada $x \in \mathbb{R}^4$,*

$$Tx = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Escribir la matriz asociada a T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Para escribir la matriz asociada a T evaluamos en la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Note que el resultado de cada evaluación estará dado en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Así,

$$Te_1 = T\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}; \qquad Te_2 = T\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};$$

$$Te_3 = T\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}; \qquad Te_4 = T\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Así, la matriz asocaida a T (utilizamos el mismo símbolo T para la matriz) es

$$T = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

□

Ejercicios

1. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = Bx$. Demostrar que $A = B$.

2. Utilizando el ejercico anterior, demostrar que la matriz de cambio de base es única.

3. En los siguientes ejercicios, calcular la matriz de cambio de base de la base canónica a la base conformada por los vectores dados y verificar que $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}P_{\mathcal{F}\to\mathcal{E}} = I$.

   a) En $\mathbb{R}^2$, sean $b_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

   b) En $\mathbb{R}^2$, sean $b_1 = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$.

   c) En $\mathbb{R}^3$, sean $b_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$

   d) En $\mathbb{R}^4$, sean $b_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$, $b_4 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$.

4. En los siguientes incisos, denote por $\mathcal{F}$ las bases de los incisos del ejercicio anterior. Calcular $v_{\mathcal{B}}$, $w_{\mathcal{B}}$, $v_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$ y $(v-w)_{\mathcal{B}}$:

   a) $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   b) $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   c) $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   d) $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. En los siguientes incisos, calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{F}$.

   a) En $\mathbb{R}^2$, sean $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right)$, $\mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$.

   b) En $\mathbb{R}^3$, sean $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, $\mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$.

6. Sea $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcular la matriz asociada al operador de proyección ortogonal P_u en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

7. Sea $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcular la matriz asociada al operador de proyección ortogonal en la base canónica y en la base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right)$. Graficar el espacio $\ell(u)$ y la base $\mathcal{B}$. Explicar en términos de espacios y subespacios vectoriales porqué se obtiene esta matriz.