

Isometrías en \mathbb{R}^n

Definición 1. Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Decimos que T es una isometría, si para cada $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Tu - Tv\|_{\mathbb{R}^m} = \|u - v\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Ejemplo 2. Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $T_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para cada $u \in \mathbb{R}^n$, $T_a u = u + a$. Entonces, T es una isometría.

Demostración. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\|T_a u - T_a v\| = \|(u + a) - (v + a)\| = \|u - v\|. \quad \square$$

Proposición 3. Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es una isometría.
2. T mantiene la norma. Es decir, para cada $a \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Ta\| = \|a\|.$$

3. T mantiene el producto interno. Es decir, para cada $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle.$$

4. $T^\top T = I$.

Demostración. 1) \implies 2) Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces, por la definición de isometría,

$$\|Ta - T0\| = \|a - 0\| = \|a\|.$$

2) \implies 3) Aplicamos la identidad de polarización para reescribir el producto interno a través de la norma.

3) \implies 4) Reescribimos la suposición en términos matriciales. Es decir, para cada $u, v \in \mathbb{R}^n$, se satisface

$$(Tv)^\top (Tu) = v^\top u.$$

Desarrollamos el lado izquierdo de la igualdad:

$$(Tv)^\top (Tu) = v^\top T^\top Tu.$$

Es decir, para todos $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$v^\top T^\top Tu = v^\top u.$$

Por lo tanto, $T^\top T = I$.

4) \implies 1) Ejercicio. □

Note que por el inciso 4 de la proposición anterior podemos concluir que las isometrías son inyectivas.

Ejemplo 4. Sea $\theta \in [0, 2\pi)$. La rotación en el ángulo θ en \mathbb{R}^2 es $T_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$T_\theta := \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Entonces, T_θ es una isometría.

Ejercicios

1. Sean $S, T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ isometrías. Demostrar que la transformación ST es una isometría.
2. Demuestre que las isometrías lineales invertibles forman un grupo.
3. Dar dos ejemplos de isometrías que no son biyectivas. ¿Cuándo una isometría es biyectiva? (con la definición que dimos, no siempre lo es)
4. Sean V, W espacios vectoriales con producto interno y $T: V \rightarrow W$. Decimos que $S: W \rightarrow V$ es la transformación adjunta a T si para todos $x, y \in V$,

$$\langle Tx, y \rangle_W = \langle x, Sy \rangle_V.$$

Sean $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|u\| = 1$ y $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $T(\lambda u) = \lambda u$. Demuestre que T es una isometría. Hallar su transformación adjunta.

5. Demuestre que si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una isometría, entonces $\det(T) = 1$ o $\det(T) = -1$. Utilizar el hecho de que el determinante es multiplicativo ($\det(XY) = \det(X)\det(Y)$) y que $\det(A) = \det(A^\top)$.
6. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una isometría tal que

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Determinar los valores de a y b .