

Matrices

Definición 1. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Una matriz de coeficientes reales es una función

$$A: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

El valor de A en cada par (j, k) se llama “entrada j, k de la matriz” y por conveniencia, las escribimos como subíndice:

$$A(j, k) = A_{j,k}, \quad (j, k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Las entradas de A se acomodan en un arreglo rectangular de m filas y n columnas.

$$A = [A_{j,k}]_{j,k=1}^{m,n} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix}.$$

En este caso, decimos que la matriz es de tamaño $m \times n$. Si $n = m$ decimos que la matriz es cuadrada de tamaño n .

Ejemplo 2. Los vectores en \mathbb{R}^n se pueden identificar con matrices de tamaño $n \times 1$. Así, cada $x \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Definición 3. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Denotamos al conjunto de matrices con coeficientes reales de tamaño $n \times m$ por $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Si $n = m$, escribimos $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Definimos la suma y producto por escalar en $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ como $+$: $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ y \odot : $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ mediante

$$A + B := [A_{j,k} + B_{j,k}]_{j,k=1}^{n,m}.$$
$$\lambda \odot A := [\lambda A_{j,k}]_{j,k=1}^{n,m}.$$

En adelante, obviaremos el símbolo \odot y para escribir el producto de escalar λ por matriz A , solo escribiremos λA .

Proposición 4. El conjunto $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ con la suma y el producto por escalar es un espacio vectorial.

Demostración. Ejercicio. □

Definición 5. Sean $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R})$. El producto de A por B se define como

$$AB := \left[\sum_{k=1}^m A_{j,k} B_{k,l} \right]_{j,l=1}^{n,p}.$$

Note que la suma de matrices es conmutativa y el producto no lo es. Sin embargo, se tienen otras propiedades interesantes.

Ejemplo 6. Sean

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$AB = \begin{bmatrix} -7 & 3 & -7 \\ 3 & -2 & 0 \\ -8 & 7 & -6 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -6 & -3 & 9 \\ 12 & -1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Las siguientes propiedades se enunciarán sin pérdida de generalidad para matrices cuadradas. Para extender estas propiedades a matrices rectangulares, hay que tener cuidado con los tamaños de las matrices.

Proposición 7. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

1. $A(B + C) = AB + AC$.
2. $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.
3. $A(BC) = (AB)C$.

Definición 8. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. La matriz transpuesta de A , denotada por A^\top es una matriz de tamaño $m \times n$, tal que sus columnas son los renglones de la matriz A . Es decir,

$$A = [A_{j,k}]_{j,k=1}^{m,n}, \quad A^\top = [A_{k,j}]_{k,j=1}^{n,m}.$$

Ejemplo 9. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces,

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposición 10. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces,

1. $(A^\top)^\top = A$.
2. $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$.
3. $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$.
4. $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Demostración. Ejercicio. □

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Note que el producto interno canónico de u por v en \mathbb{R}^n , se puede escribir a través del producto de matrices:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n u_j v_j = v^\top u.$$

Ejercicios

1. Escriba de manera explícita las siguientes matrices:

- a) $A = [(-1)^j(j+k)]_{j,k=1}^{3,2}$.
- b) $A = [\text{máx}(j, k)]_{j,k=1}^{4,3}$.
- c) $A = [\text{mín}(j, k)]_{j,k=1}^{4,2}$.

2. Calcular $A + B$, λA y λB para los siguientes casos:

- a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = -2$.
- b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 5$.

3. Enunciar las propiedades de la proposición 7 para matrices rectangulares.

4. Verificar la propiedad asociativa del producto de matrices para los siguientes casos:

- a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

5. Demostrar la proposición 10.