

Rectas en el plano

Sea $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Asociamos el espacio generado por u , $\ell(u)$, con la recta que pasa por u y el 0. Realizaremos la justificación de este hecho, obteniendo las ecuaciones de la recta a partir de nuestra definición de $\ell(u)$.

Sea $x \in \ell(u)$. Entonces, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x = \lambda u$. Así, obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Esto es equivalente a escribir el sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda u_1, \\ x_2 &= \lambda u_2. \end{aligned}$$

Despejando λ en ambas ecuaciones,

$$\lambda = \frac{x_1}{u_1} = \frac{x_2}{u_2}.$$

Por lo tanto, podemos escribir la relación:

$$x_2 = x_1 \frac{u_2}{u_1}.$$

Definición 1. Sean V un espacio vectorial, $X \subseteq V$ no vacío y $a \in V$. Definimos

$$a + X := \{w \in V : \exists u \in X, w = a + u\}.$$

Es fácil ver que

$$a + X = \{u \in V : u - a \in X\}.$$

Una recta que no pasa por 0 es de la forma

$$a + \ell(u).$$

Sea $x \in a + \ell(u)$. Entonces, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x = a + \lambda u$. Como en el caso anterior, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &\iff \\ x_1 &= a_1 + \lambda u_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda u_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lambda = \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2}.$$

Del último par de igualdades tenemos

$$x_2 = \frac{u_2}{u_1}(x_1 - a_1) + a_2.$$

1. Producto cruz

Definición 2. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. El producto cruz de u con v es

$$u \times v := \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}.$$

A partir de la definición del producto cruz es fácil obtener sus propiedades elementales.

Proposición 3 (Propiedades del producto cruz). Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

1. $u \times u = 0$.
2. $u \times v = -v \times u$.
3. $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v) = u \times (\lambda v)$.
4. $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$.
5. $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$.

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 4 (Ortogonalidad del producto cruz). Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces,

$$\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0.$$

Demostración. Ejercicio. □

2. Planos en el espacio

Sean $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Obtendremos las ecuaciones del plano que contiene a 0 , u y v , a partir de la definición de $\ell(u, v)$.

Sea $x \in \ell(u, v)$. Entonces, existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x = \lambda_1 u + \lambda_2 v$. Entonces, tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_1,$$

$$x_2 = \lambda_1 u_2 + \lambda_2 v_2,$$

$$x_3 = \lambda_1 u_3 + \lambda_2 v_3.$$

Resolviendo para λ_1 y λ_2 de las primeras dos ecuaciones, tenemos

$$\lambda_1 = \frac{x_1 v_2 - x_2 v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, \quad \lambda_2 = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}.$$

Sustituyendo en la tercer ecuación,

$$\begin{aligned} x_3 &= u_3 \frac{x_1 v_2 - x_2 v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} + v_3 \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \\ &= x_1 \frac{u_3 v_2 - u_2 v_3}{u_1 v_2 - u_2 v_1} + x_2 \frac{u_1 v_3 - u_3 v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \end{aligned}$$

Asociando los términos de un solo lado de la igualdad, tenemos

$$0 = x_1(u_3 v_2 - u_2 v_3) - x_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + x_3(u_2 v_1 - u_1 v_2) = \langle u \times v, x \rangle.$$

Así, $x \in \ell(u, v)$ si y solo si, $\langle u \times v, x \rangle = 0$.

El vector $u \times v$ se llama vector normal al plano generado por u y v .

Ejercicios

1. Sean V un espacio vectorial y $a \in V$. Demuestre que

$$a + X = \{u \in V : u - a \in X\}.$$

2. Encontrar las ecuaciones de las rectas con las propiedades requeridas:

- a) Pasa por $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y es paralela a la recta $x_1 = 2 + 2x_1$.
- b) Pasa por $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y es ortogonal a la recta $x_2 = x_1 - 3$.
- c) Pasa por $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con la recta $x_2 = -x_1 - 4$.
3. Sean $a, u \in \mathbb{R}^2$. Utilizando el operador de proyección ortogonal, determine una regla para calcular la distancia de a a $\ell(u)$.
4. Demostrar la proposición 3
5. Demostrar la proposición 4.
6. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ y denotamos por $\theta_{u,v}$ al ángulo formado por u y v , es decir,

$$\theta_{u,v} = \arccos \left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right).$$

Demuestre que

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin(\theta_{u,v}).$$

7. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ linealmente independientes. Utilizando el ejercicio anterior, muestre que el área del paralelogramo que tiene por lados a u y v es

$$\|u \times v\|.$$

8. Sean $x, a, v, w \in \mathbb{R}^3$. Determine la ecuación que satisface x para pertenecer al plano $a + \ell(u, v)$. En otras palabras, encontrar la ecuación del plano que contiene a a, v y w , razonando como se hizo al principio de este apunte con el conjunto $a + \ell(u)$.