Transformaciones lineales

Definición 1. *Sean V, W espacios vectoriales reales y $T\colon V \to W$. Decimos que T es una transformación lineal si para todos $u, v \in V$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$T(u+v) = Tu + Tv,$$
$$T(\lambda u) = \lambda T(u).$$

Ejemplo 2. *Sea V un espacio vectorial y $I\colon V \to V$ la transformación identidad, es decir, para todo $v \in V$, $Iv = v$. Entonces, I es una transformación lineal: Sean $u, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$I(\lambda u + w) = \lambda u + w = \lambda Iu + Iw.$$

Proposición 3. *Sean V, W espacios vectoriales reales y $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Entonces, $T0_V = 0_W$.*

Demostración. Notamos que

$$T0_V = T(0_v + 0_V) = T0_V + T0_V.$$

Cancelando uno de los sumandos, tenemos

$$0_W = T0_V. \qquad \square$$

Proposición 4. *Sean V, W espacios vectoriales reales, $T\colon V \to W$, $m \in \mathbb{N}$, $v_1, \ldots, v_m \in V$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$T\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j T v_j.$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre la cantidad de sumandos.

Para $m = 2$, el resultado se satisface por definición.

Supongamos que la igualdad es válida para algún m. Demostraremos que sigue siendo válido para $m+1$: sean $v_1, \ldots, v_{m+1} \in V$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1} \in \mathbb{R}$. Luego, aplicamos el caso

$m = 2$ separando el último sumando y aplicamos la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k v_k\right) &= T\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k + \lambda_{m+1} v_{m+1}\right) \\ &= T\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k +\right) + T\left(\lambda_{m+1} v_{m+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \lambda_k T v_k + \lambda_{m+1} T v_{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k T v_k. \end{aligned}$$

□

Proposición 5. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ y hacemos $T_A \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mediante*

$$T_A v := Av.$$

Entonces, T_A es una transformación lineal.

Demostración. Ejercicio. □

Ejercicios

Determine si las siguientes transformaciones son lineales.

1. $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$Tx = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

2. Sean $C_{[a,b]}$ el espacio de funciones continuas en $[a, b]$ y $T \colon C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$,

$$(Tf)(x) = xf(x).$$

3. $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

4. $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}.$$

5. $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

6. Sea $T\colon \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, el operador de derivada:

$$T(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \coloneqq a_1 + 2a_2 + \cdots n a_n x^{n-1}.$$

7. $T\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$TA \coloneqq A^\top.$$