1. Subespacios vectoriales

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial y $W \subseteq V$. Decimos que W es subespacio vectorial de V si W es un espacio vectorial con las operaciones de V restringidas a W. En este caso, escribimos*

$$W < V.$$

Ejemplo 2. *Sea V un espacio vectorial. Entonces, $\{0\}$ y V son subespacios de V.*

Ejemplo 3. *Sea $W \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \colon\ x_2 > 0\}$. Entonces, W no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Basta notar que el vector $(0, 0)$ no es elemento de W. $\square$

Proposición 4. *Sea V un espacio vectorial y $W \subseteq V$. Entonces, W es subespacio de V si y solo si, para cada $u, v \in W$ y para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\lambda u - v \in W.$$

Demostración. Si W es espacio vectorial, se tiene que para cada $u, v \in W$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u - v \in W$.

Supongamos que para cada $u, v \in W$ y para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u - v \in W$. Debemos verificar que W satisface las 8 propiedades de espacio vectorial. Sin embargo, la mayoría se tiene de restringir las operaciones de V a W. Veamos que $0 \in W$ y que para cada $u \in W$, $-u \in W$.

Sea $u \in W$. Entonces, $0 = u - u = 1u - u \in W$.

Ahora, sea $u \in W$. Tomando $\lambda = -1$ y como $0 \in W$, $-u = (-1)\,u + 0 \in W$. $\square$

Ejemplo 5. *En $\mathbb{R}^2$, consideramos el conjunto*

$$A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \colon\ x_2 = x_1\}.$$

Entonces, A es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Utilizaremos la proposición 4 para demostrar que A es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Sean $u, v \in A$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, existen algunos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u_1 = u_2 = a$ y $v_1 = v_2 = b$. Hacemos $x = \lambda u - v$. Observamos el vector x de manera explícita:

$$x = \lambda u - v = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 - v_1 \\ \lambda u_2 - v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a - b \\ \lambda a - b \end{bmatrix}.$$

Así $x_1 = x_2$. Por lo que, $\lambda u - v \in A$ y por la proposición 4, A es subespacio de $\mathbb{R}^2$. $\square$

2. Subespacios de $\mathbb{R}^n$

A partir de la desigualdad de Cauchy–Schwarz derivamos las siguientes definiciones.

Definición 6. *Sean V un espacio vectorial y $u \in V$. Definimos*

$$\ell(u) \coloneqq \{x \in V\colon \ \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda u\}.$$

Proposición 7. *Sea V un espacio vectorial. Para cada $u \in V$, $\ell(u) < V$.*

Demostración. Sean $x, y \in \ell(u)$. Entonces, existen $\beta_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x = \beta_1 u$ y $y = \beta_2 u$. Luego,

$$\lambda x - y = \lambda \beta_1 u - \beta u = (\lambda \beta_1 - \beta_2) u.$$

Haciendo $\xi \coloneqq \lambda \beta_1 - \beta_2$, tenemos que $\lambda x - y = \xi u$. Por lo tanto, $\lambda x - y \in \ell(u)$. De la proposición 4 se sigue $\ell(u) < V$. $\square$

En adelante, diremos que $\ell(u)$ es el espacio generado por u.

Definición 8. *Sean V un espacio vectorial con producto interno y $u \in V$. Definimos el complemento ortogonal de u como*

$$u^{\perp} \coloneqq \{x \in V\colon \ \langle x, u \rangle = 0\}.$$

Proposición 9. *Sean V un espacio vectorial con producto interno y $u \in V$. Entonces, $u^{\perp} < V$.*

Demostración. Sean $x, y \in u^{\perp}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

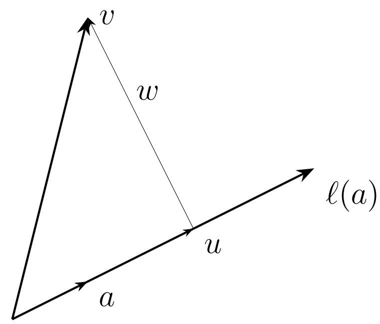
$$\langle \lambda x - y, u \rangle = \lambda \langle x, u \rangle - \langle y, u \rangle = 0.$$

Por lo tanto, $\lambda x - y \in u^{\perp}$. De la proposición 4 se sigue que $u^{\perp} < V$. $\square$

3. Proyección ortogonal

Sean V un espacio vectorial con producto interno y $a, v \in V$.

¿Es posible encontrar $u, w \in V$ tales que $u \in \ell(a)$, $w \in a^{\perp}$ y $v = u + w$?



Suponiendo que hemos encontrado $u \in \ell(a)$, tenemos que $w = v - u$. Además, $w \in a^{\perp}$. Es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v-u, a\rangle = \langle v - \lambda a, a\rangle \\ &= \langle v, a\rangle - \lambda\langle a, a\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda = \frac{\langle v,a\rangle}{\langle a,a\rangle}$. Así, $u = \lambda a$ y $w = v - \lambda a$.

Note que u y w se determinan de manera única por a y v.

Definición 10. *Sean V un espacio vectorial y $a \in V$. Definimos el operador de proyección ortogonal como $\mathrm{P}_a \colon V \to \ell(a)$ mediante*

$$\mathrm{P}_a v \coloneqq \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a.$$

Definimos el operador de proyección sobre el complemento ortogonal como $\mathrm{Q}_a \colon V \to \ell(a)$ mediante

$$\mathrm{Q}_a v \coloneqq (\mathrm{I}_V - \mathrm{P}_a) v = v - \mathrm{P}_a v$$

Ejemplo 11. *En $\mathbb{R}^2$, sea $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Construiremos P_a.*

Para cada $v \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle v, a\rangle = 2v_1 + v_2.$$

Además,

$$\langle a, a\rangle = 4 + 1 = 5.$$

Luego,

$$\mathrm{P}_a v = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a = \frac{2v_1 + v_2}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4v_1 + 2v_2}{5} \\ \frac{2v_1 + v_2}{5} \end{bmatrix}.$$

Ejercicios

1. Sean V un espacio vectorial y $U, W < V$. Demuestre que $(U \bigcap W) < V$.

2. En los siguientes ejercicios, determinar si $W < V$. De ser posible, realizar un dibujo de cada V y W.

   a) Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ y $V = \mathbb{R}^n$ $W = \{x \in \mathbb{R}^n : \; x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\}$.

   b) Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\mathcal{P}_n$ al conjunto de polinomios de grado menor o igual que n. Sean $V = \mathcal{P}_n$ y $W = \mathcal{P}_m$.

   c) $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; \|x\| = 1\}$.

   d) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2 \geq 0\}$.

   e) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_2 = x_1^2\}$.

   f) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 = 0\}$.

   g) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_2 = 5\}$.

3. Realizar un dibujo de los espacios $\ell(u)$ en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

4. Consideramos $\mathcal{P}_n$ con el producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, \mathrm{d}t.$$

   Sea $f \in \mathcal{P}_n$. ¿Cómo se ve el espacio $\ell(f)$?

5. Sean V un espacio vectorial con producto interno y $X \subseteq V$. Escriba la definición de $X^{\perp}$.

6. Sean $X, Y \subseteq V$ tales que $X \subseteq Y$. Demuestre que $Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$.

7. Demuestre la desigualdad de Cauchy–Schwarz utilizando el operador de proyección ortogonal.

8. Sean V un espacio vectorial con producto interno y $a \in V$. Demuestre que $\mathrm{P}_a^2 = \mathrm{P}_a$.

9. Considere $\mathcal{P}_n$ con el producto interno del ejercicio 4. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x - 1$. Calcular $\mathrm{P}_f g$ y $\mathrm{Q}_f g$. Graficar $f, g, \mathrm{P}_f g$ y $\mathrm{Q}_f g$.

10. En los siguientes ejercicios, calcular de manera explícita P_a y Q_a y aplicarlo a los vectores u_1, u_2, u_3.

a) En $\mathbb{R}^2$, sea $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$.

b) En $\mathbb{R}^2$, sea $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) En $\mathbb{R}^3$, sea $a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$.

d) En $\mathbb{R}^3$, sea $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.